Д. ПОЙА

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Перевод с английского

Под редакцией *Ю. М. ГАЙДУКА*

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1959

Обозначения. Чтобы почувствовать преимущество удачно выбранного и хорошо знакомого обозначения, попытайтесь сложить несколько больших чисел при условии, что нельзя пользоваться привычными арабскими цифрами, а можно прибегать лишь к римским цифрам. Возьмите, например, числа MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Трудно переоценить значение математических обозначений. Современные вычислители, пользующиеся десятичным обозначением, имеют значительное преимущество над древними, у которых не было такого удобного способа записи чисел. Современный учащийся, знакомый с обычными обозначениями алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, имеет огромное преимущество перед греческим математиком в решении задач на площади и объемы, задач, на которых упражнялся гений Архимеда.

1. Речь и мышление тесно связаны. Употребление слов развивает мышление. Некоторые философы и филологи пошли несколько дальше, утверждая, что без слов нет мышления.

Однако это последнее утверждение кажется нам некоторым преувеличением. Если у вас есть некоторый опыт серьезной математической работы, вам известно, что можно проделать очень большую умственную работу, не прибегая к словам, а рассматривая лишь геометрические фигуры или пользуясь алгебраическими символами. Фигуры и символы тесно связаны с математическим мышлением; использование их развивает его. Можно было бы уточнить несколько ограниченное утверждение философов и филологов, включая в данное ими определение наряду со словами другие виды символов и формулируя его так: *без символов нет мышления.*

Во всяком случае, употребление математических символов подобно употреблению слов. Математические обозначения выступают как своего рода особый язык, *une langue bien faite*, язык, хорошо приспособленный к своему назначению, краткий и точный, с правилами, которые в отличие от правил обычной грамматики не терпят никаких исключений.

С этой точки зрения, составление уравнений имеет сходство с переводом, переводом с обычного языка на язык математических символов.

2. Такие математические символы, как $+$, $-$, $=$ и ряд других, имеют определенный общепринятый смысл. Другие же символы, как, например, маленькие и заглавные буквы греческого и римского алфавитов, могут иметь разный смысл

в различных задачах. Встречаясь с новой задачей, мы должны выбрать определенные символы, *ввести подходящие обозначения*.

Здесь имеется некоторая аналогия с употреблением обычного языка. Многие слова в различных контекстах имеют различный смысл; когда важна точность, мы должны тщательно выбирать слова.

Выбор обозначений является важным моментом в решении задачи. К нему следует отнестись очень внимательно. Потраченное на выбор обозначений время с лихвой компенсируется тем временем, которое мы сэкономим, избежав путаницы в работе. Более того, тщательно выбирая обозначения, мы будем хорошо разбираться в тех элементах задачи, которые подлежат обозначению. Таким образом, выбор подходящего обозначения может существенно помочь нам понять задачу.

3. Хорошая система обозначений должна удовлетворять следующим требованиям: она должна быть однозначной, содержательной, легко запоминающейся. Она должна исключать «вредные» дополнительные значения и с выгодой использовать «полезные» дополнительные значения. Порядок и связь между обозначениями должны определять порядок и связь между обозначаемыми объектами.

4. Знаки должны прежде всего иметь определенное *значение*. Недопустимо, чтобы один и тот же знак обозначал два различных объекта или понятия в одной и той же задаче[1]. Если, решая задачу, вы обозначили какую-нибудь величину буквой a, не следует в этой же задаче обозначать той же буквой другую величину. Разумеется, в другой задаче можно использовать букву a в другом значении.

Хотя и запрещается использовать один символ для обозначения разных объектов, но можно использовать различные символы для обозначения одного и того же объекта. Например, произведение a на b может быть записано как:

$$a \times b, \quad a \cdot b \quad \text{и} \quad ab.$$

[1] К сожалению, этот принцип не всегда еще соблюдается в существующих фактически системах обозначений. Так, в традиционной символике учения о функциональной зависимости знак $f(x)$, смотря по контексту, может обозначать как самое функцию (закон функционального соответствия), так и значение зависимой переменной, соответствующее значению x аргумента. Такая двусмысленность знака $f(x)$ нередко серьезно затрудняет учащихся, начинающих изучать основы математического анализа. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

В ряде случаев выгодно использовать два или более различных символа для обозначения одного и того же объекта, но в таких случаях требуется особая осторожность. Обычно лучше всего пользоваться лишь одним символом для обозначения одного объекта и без настоятельной необходимости не применять несколько обозначений.

5. Хорошее обозначение должно *легко запоминаться* и легко распознаваться. Обозначение должно немедленно вызвать у нас представление об обозначаемом, и наоборот.

Есть простой способ делать обозначения легко узнаваемыми — это применять начальные буквы в качестве символов. Например, в пункте 20 мы использовали r для обозначения скорости (англ.— rate), t — времени (англ. — time), V — объема (англ. — volume). Мы не можем, однако, пользоваться этими буквами во всех случаях. Так, в пункте 20 нам пришлось рассматривать радиус, но мы не могли обозначить его через r, так как этой буквой обозначалась скорость. Существуют и другие соображения, ограничивающие выбор символов, и есть способы сделать символы легко узнаваемыми. О них речь будет идти ниже.

6. Обозначения будут не только легко ассоциироваться с понятиями, но и окажутся особенно полезными для оформления наших представлений, когда порядок и связь между обозначениями подсказывают порядок и связь между самими объектами. Для того чтобы проиллюстрировать эту мысль, приведем несколько примеров.

(I) Для обозначения родственных объектов в рассматриваемой задаче мы пользуемся буквами, расположенными в алфавитном порядке.

Так, например, для обозначения известных или постоянных величин мы обычно пользуемся начальными буквами алфавита a, b, c, а для обозначения неизвестных или переменных величин последними буквами алфавита x, y, z.

В пункте 8 для обозначения известных — длины, ширины, высоты параллелепипеда — мы пользовались буквами a, b, c. В этом случае обозначения a, b, c имели преимущество перед символами l, w, h[1], так как эти три величины играли одинаковую роль в решении задачи, что и подчеркивается тем, что для их обозначения использованы буквы, расположенные в алфавитном порядке. Более того, посколь-

[1] l — первая буква английского слова length — длина, w — width — ширина, h — height — высота. (Примечание переводчика.)

ку a, b, c являются первыми буквами алфавита, они, как мы уже говорили, чаще всего используются для обозначения заданных величин. В каком-либо другом случае, когда эти три величины будут играть разную роль — и важно будет знать, которая из них относится к горизонтальному или вертикальному отрезку, можно предпочесть обозначения l, w, h.

(II) Для обозначения объектов одной категории мы обычно пользуемся буквами одного алфавита. Для обозначения объектов разных категорий пользуются буквами различных алфавитов. Так, в планиметрии мы часто употребляем:

заглавные латинские буквы A, B, C,... для обозначения точек,

малые латинские буквы a, b, c, для обозначения отрезков прямой,

малые греческие буквы α, β, γ,... для обозначения углов.

Для обозначения объектов разных категорий, имеющих какую-нибудь существенную связь между собой, важную для нашей задачи, мы можем пользоваться соответствующими заглавными и маленькими буквами одного алфавита, как, например, A и a, B и b и т. д. Для примера возьмем хорошо знакомые символы для обозначения элементов треугольника:

A, B, C, — его вершины,
a, b, c, — его стороны,
α, β, γ, — его углы.

Обозначая так, мы полагаем, что a — сторона, лежащая против вершины A, а α — угол при этой вершине.

(III) В пункте 20 выбор букв a, b и x, y особенно удачен в смысле определения характера обозначаемых элементов и выявления связи между ними. Буквы a и b подсказывают, что обозначенные ими величины постоянные, в то время как x и y указывают на переменный характер соответствующих величин: a так предшествует b, как x предшествует y, а это наводит на мысль, что a относится к b так, как x к y. И в самом деле, a и x горизонтальные отрезки, b и y — вертикальные и $a:b=x:y$.

7. Запись

$$\triangle ABC \backsim \triangle EFG$$

означает, что данные треугольники подобны. В современных книгах эта формула указывает на соответствие вершин в том порядке, в котором они записаны: A соответствует E, B—F и C—G.

В старых книгах это условие о порядке соответствия вершин еще не было введено и читателю приходилось обращаться либо к чертежу, либо запоминать расположение соответствующих вершин.

Современные обозначения намного предпочтительнее старых. Пользуясь современными обозначениями, мы можем делать выводы из формул, *не обращаясь к чертежу*. Мы, например, можем утверждать, что

$$\angle A = \angle E,$$
$$AB:BC = EF:FG \text{ и т. д.}$$

Старые обозначения менее выразительны и не позволяют делать таких определенных заключений.

Обозначение, позволяющее по сравнению с другим сделать больше выводов, может быть названо более *содержательным*. Современное обозначение подобия треугольников по сравнению со старым содержательнее, оно более полно, нежели старое, отражает порядок и связь элементов и поэтому может служить основой для большего числа выводов.

8. Слова имеют *дополнительные значения*. Некоторые контексты, в которых какое-нибудь слово часто употребляется, влияют на него и добавляют к его главному значению какой-нибудь оттенок, дополнительный смысл или дополнительное значение. Если мы внимательно относимся к изложению своих мыслей, то мы стараемся выбрать из ряда близких по смыслу слов то дополнительное значение, которое нам больше всего подходит.

Нечто похожее есть и в математических обозначениях. Даже математические символы могут приобрести дополнительное значение из контекстов, в которых они часто встречаются. При внимательном выборе обозначений мы должны учесть это обстоятельство. Чтобы это было понятно, проиллюстрируем сказанное примерами.

Есть ряд букв, имеющих твердое, общепринятое значение. Так, e обычно обозначает основание натуральных логарифмов, i обозначает $\sqrt{-1}$, т. е. мнимую единицу, и π — отношение длины окружности к диаметру. Лучше всегда употреблять такие символы только в их традиционном значении. Если мы воспользуемся таким символом в какомнибудь другом значении, его традиционное значение может иногда смутить нас и даже ввести в заблуждение. Правда, «вредные» дополнительные значения такого рода меньше беспокоют начинающего, который изучил сравнительно мало отделов, чем специалиста-математика, которому приходилось уже, вероятно, не раз иметь дело с такого рода неприятностями.

В то же время дополнительные значения символов могут быть полезными для нас, даже весьма полезными, если ими пользоваться с должным чувством меры. Обозначение, использованное ранее при решении, может помочь нам вспомнить какой-нибудь полезный прием. Разумеется, мы должны быть достаточно внимательны, чтобы четко отличать данное (основное) значение от его предыдущего (дополнительного) значения. *Утвердившееся обозначение* [например, традиционное обозначение элементов треугольника, упомянутое выше, п. 6 (II)] имеет бóльшие достоинства. Будучи использованным в ряде случаев при решении задач, оно может воскресить в нашей памяти приемы, которые применялись нами ранее. Ведь мы запоминаем формулы с утвердившимися обозначениями. Конечно, следует соблюдать бóльшую осторожность в тех случаях, когда в силу особых обстоятельств мы вынуждены прибегать к утвердившемуся обозначению, придавая ему смысл, несколько отличный от обычного.

9. Когда нам приходится остановить свой выбор на одном из двух обозначений, надо иметь в виду, что в пользу каждого из них есть свои соображения. Для выбора наиболее подходящего обозначения, так же как и в выборе наиболее подходящего слова, необходимы опыт и чувство меры. Для этого полезно знать различные преимущества и недостатки обозначений, о которых речь шла выше. Во всяком случае, нам следует внимательно относиться к выбору обозначения и *достаточно убедительно его мотивировать*.

10. Не только самые безнадежные ученики, но порой и довольно способные питают отвращение к алгебре. В обозначениях всегда есть что-то произвольное и искусственное. Заучить новое обозначение — это бремя для памяти и поэтому даже способный ученик отказывается принять на себя такое бремя, если он не видит в этом никакой пользы. Отвращение серьезного учащегося к алгебре оправдано, если собственный опыт не убеждает его в том, что язык математических символов помогает ему в решении задач. Помочь ученику приобрести такой опыт является важной задачей учителя, одной из его наиболее важных задач.

Мы подчеркиваем важность этой задачи, но не утверждаем, что ее легко разрешить. Вышеизложенные замечания могут быть полезными. Смотрите также **составление уравнений**. Проверка формулы путем всестороннего рассмотрения ее свойств может быть рекомендована в качестве особо поучительного упражнения.

(См. п. 14 и «Нельзя ли проверить результат?», п. 2.)

Определение термина, обозначающего новое понятие, есть установление его смысла при помощи других терминов, которые предполагаются известными.

1. *Специальные термины* в математике бывают двух видов. Некоторые из них считаются первоначальными и не подлежащими определению. Другие считаются производными и должным образом определяются, т. е. смысл их устанавливается при помощи первоначальных и ранее определенных понятий. Так, например, мы не даем логических определений таким первоначальным понятиям, как точка, прямая и плоскость [1]. Напротив, такие понятия, как «биссектриса угла», «окружность», «парабола», вводятся при помощи логических определений.

Определение последнего из приведенных понятий может быть сформулировано следующим образом.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой. Эта точка называется *фокусом* параболы, а прямая — *директрисой* параболы. Здесь подразумевается, что все эти элементы принадлежат одной и той же плоскости, причем данная точка (фокус) не лежит на данной прямой (директрисе).

Предполагается, что читателю не известен смысл определяемых терминов (парабола, ее фокус, ее директриса). Однако предполагается, что ему известен смысл всех других терминов (точка, прямая, плоскость, расстояние между двумя точками, геометрическое место и т. д.).

---

[1] Взгляд на эти понятия претерпел со времен Евклида существенные изменения. Евклид и его последователи в античной Греции определяли точку, прямую и плоскость. Однако их «определения» едва ли являются логическими определениями; это, скорее, лишь известного рода интуитивные иллюстрации рассматриваемых понятий. В преподавании такие иллюстрации, конечно, допустимы и даже желательны. (Примечание автора.— *Ред.*)

2. *Определения, приводимые в толковых словарях*, внешне мало отличаются от математических определений, но принцип их составления совершенно иной.

Составителя словаря интересует прежде всего общепринятый смысл слов. Этот общепринятый смысл *принимается* им как нечто известное и облекается им в форму определения.

Математика не интересует общепринятый смысл некоторого специального термина (во всяком случае, не это интересует его в первую очередь).

Для него довольно безразлично, что могут в обычной речи означать «окружность», «парабола» или любой другой специальный термин подобного рода. Математическое определение *создает* смысл математического термина.

3. *Пример*. Построить точку пересечения данной прямой и параболы, заданной своим фокусом и директрисой.

Наш подход к любой задаче должен зависеть от состояния наших знаний. Подход к только что сформулированной задаче зависит главным образом от того, насколько мы знакомы со свойствами параболы.

Если нам известно много фактов относительно свойств параболы, мы пытаемся извлечь пользу из наших сведений: *Не знаете ли вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной?*

Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Если наши сведения о параболе, фокусе, директрисе довольно скудны, то эти термины скорее сбивают нас с толку. Мы, естественно, хотим освободиться от них. Но как можно от них избавиться? Прислушаемся к диалогу, происходящему между учителем и учащимся, которые заняты поисками решения задачи о пересечении прямой и параболы.

Они уже выбрали *подходящие обозначения*: P — какая-нибудь из искомых точек пересечения; F — фокус; d — директриса, c — прямая, пересекающая параболу.

«*Что неизвестно?*»

«Точка P».

«*Что дано?*»

«Прямые c, d и точка F».

«*В чем состоит условие?*»

«P есть точка пересечения прямой c и параболы с фокусом F и директрисой d».

«Правильно. Вам не приходилось, как мне известно, много заниматься изучением свойств параболы, но, вероятно, вы сможете объяснить, что же такое „парабола"?»

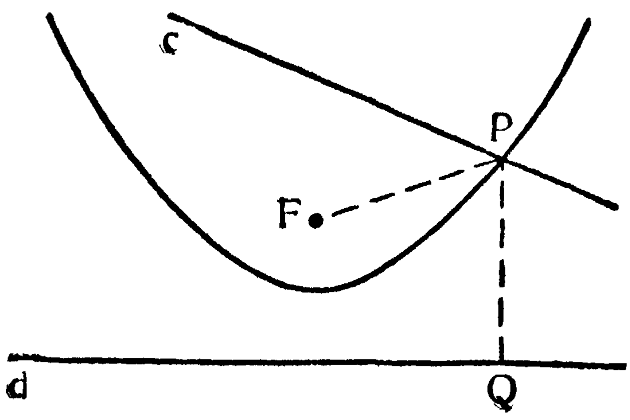
«Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса и директрисы».

«Верно. Вы правильно сформулировали определение. Но этого мало; нужно его использовать. *Вернитесь к определениям.* Что вы можете сказать об искомой точке P, опираясь на определение параболы?»

«P лежит на параболе. Поэтому P равноудалена от d и от F».

«Прекрасно. *Сделайте чертеж!*»

Ученик проводит на чертеже (фиг. 17) отрезки PF и PQ, причем PQ есть перпендикуляр, опущенный из P на d.



Фиг. 17.

«Нельзя ли теперь *иначе сформулировать задачу*?»...

«Не могли бы вы сформулировать задачу по-иному, используя отрезки, которые только что построены?»

«P есть такая точка прямой c, что $PF = PQ$».

«Хорошо. Но объясните словами: что такое PQ?»

«Расстояние точки P от прямой d».

«Верно. Теперь-то вы, очевидно, сможете сформулировать задачу по-новому. Но, пожалуйста, тщательно, при помощи законченного предложения».

«Найти точку P, лежащую на данной прямой c, равноудаленную от данной точки F и данной прямой d».

«Сравните первоначальную формулировку задачи и новую формулировку. Первоначальная формулировка была полна незнакомых специальных терминов, таких, как «парабола», «фокус», «директриса»; она звучала немного напыщенно и высокопарно. Теперь не осталось и следа от этих незнакомых специальных терминов; вы устранили их из формулировки задачи. Прекрасно!»

4. *Исключение специальных терминов* явилось результатом работы, описанной в предыдущем примере. Отправившись от формулировки задачи, содержавшей некоторые специальные термины (парабола, фокус, директриса), мы в конце концов пришли к новой формулировке, свободной от таких терминов.

Чтобы устранить из формулировки задачи некоторый специальный термин, мы должны знать его определение.

Однако одного этого знания мало; определение нужно использовать.

Так, в предыдущем примере недостаточно было вспомнить определение параболы. Решающий шаг состоял во введении отрезков PF и PQ, равенство которых следовало из определения параболы. Это типичный прием. Мы присоединяем к уже имеющимся объектам некоторые новые, выбранные подходящим образом. Пользуясь определением, мы устанавливаем соотношения, связывающие вновь введенные элементы. Если эти соотношения полностью определяют смысл рассматриваемого понятия, это означает, что определение нами использовано. Этим самым мы устранили специальный термин.

Описанный прием может быть назван *возвращением к определениям*.

Возвращаясь к определению некоторого специального термина, мы освобождаемся от этого термина, вводя вместо него некоторые новые элементы, связанные определенными соотношениями.

Происходящее при этом изменение в нашем восприятии задачи может оказаться существенным. Во всяком случае, важно помнить, что любая новая формулировка, как вообще любое видоизменение задачи, может приблизить нас к ее решению.

5. *Определения и известные теоремы.* Если мы слыхали термин «парабола», имеем некоторое приблизительное понятие о форме этой кривой, но этим и ограничиваются наши познания, то они, конечно, надостаточны, чтобы при их помощи решить рассмотренную выше в виде примера задачу, так же как и любую другую серьезную геометрическую задачу, связанную с параболой. Какой же уровень знаний необходим для этой цели?

Геометрия как наука строится из аксиом, определений и теорем.

Понятие «парабола» не упоминается в аксиомах геометрии, в которых идет речь лишь о таких первоначальных понятиях, как «точка», «прямая» и т. д. Любое геометрическое рассмотрение, связанное с параболой, решение любой задачи, в которой идет речь о параболе, предполагают использование либо определения параболы, либо некоторых теорем об этой кривой. Решая подобную задачу, мы должны знать по крайней мере определение, хотя лучше иметь в своем распоряжении и несколько теорем.

То, что мы сказали в отношении параболы, верно, конечно, в отношении любого другого производного понятия. Приступая к решению задачи, связанной с подобным понятием, мы еще не можем сказать, что окажется удобнее в процессе решения: определение понятия или некоторая теорема, связанная с ним; однако ясно, что нам предстоит использовать либо одно, либо другое.

В некоторых случаях, конечно, мы не имеем выбора. Если нам известно лишь определение понятия и ничего более, мы вынуждены использовать это определение. Если наши познания ограничиваются определением понятия, то лучшее, что мы можем сделать,— это вернуться к определению. Однако если мы знаем много теорем, связанных с данным понятием, и обладаем достаточным опытом в оперировании им, то имеется вероятность, что мы найдем теорему, выясняющую интересующие нас свойства рассматриваемого понятия.

6. *Различные определения.* Сфера обычно определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (в этом определении имеются в виду точки пространства, а не точки плоскости, как это было в предыдущем примере). Однако сферу можно определить и по-другому, например как поверхность, описываемую окружностью, вращающейся относительно своего диаметра. Известны и другие определения сферы.

Решая задачу, связанную с некоторым производным понятием, таким, как «сфера» или «парабола», и желая вернуться к его определению, мы должны остановиться на каком-либо одном определении из нескольких возможных. В подобном случае выбор подходящего определения может иметь большое значение.

Найдя площадь поверхности сферы, Архимед решил весьма важную и по тем временам чрезвычайно трудную задачу; Архимед должен был сделать выбор между различными определениями сферы, перечисленными выше. Он нашел удобным понимать под сферой поверхность, образованную вращением окружности относительно своего диаметра. При этом, он вписал в эту окружность правильный многоугольник с четным числом сторон, две противоположные вершины которого совпали с концами упомянутого диаметра. Этот правильный многоугольник аппроксимирует исходную окружность; вращаясь вместе с ней, он порождает выпуклую поверхность, состоящую из двух конусов, вершины которых совпадают с концами рассматриваемого диаметра окружности, и ряда усеченных конусов. Эта поверхность, составленная из кусков конических поверхностей, аппроксимирует сферу. Архимед, рассматривая эту поверхность, получает возможность вычислить площадь поверхности сферы. Если бы мы под сферой понимали геометрическое место точек, равноудаленных от центра, это определение не могло бы столь естественно навести нас на мысль о возможности описанной простой аппроксимации.

7. Возвращение к определениям, играя важную роль в процессе решения задачи, не менее важно и при проверке решения.

Пусть некто объявляет о найденном им новом решении задачи Архимеда о вычислении площади поверхности сферы. Если он имеет лишь смутное представление о том, что такое сфера, в его решении мы напрасно будем искать какой-либо толк.

Пусть он даже имеет ясное представление о том, что такое сфера, но если при решении задачи он не использовал известных ему свойств сферы, мы не можем сказать, знает ли он вообще хоть что-нибудь о сфере. Такое решение никуда не годится.

Поэтому, знакомясь с ходом решения, мы ждем момента, когда о сфере будет сказано что-либо по существу, т. е. будет использовано либо определение сферы, либо какая-нибудь теорема о сфере. Если такой момент не наступает, решение никуда не годится.

Таким же самым образом следует проверять не только чужие, но, конечно, и свои собственные решения.

Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче? Как вы использовали эти понятия? Воспользовались ли вы содержанием этих понятий, следующим из их определений? Применили ли вы какие-либо существенные факты, известные теоремы, связанные с этими понятиями?

Важность возвращения к определениям при проверке законности некоторого рассуждения подчеркивалась еще Паскалем, установившим правило «Substituer mentalement les définitions á la place des définis», что означает «подставить мысленно определения вместо определяемых терминов». Важность возвращения к определениям при построении некоторого рассуждения подчеркивалась и Адамаром.

8. Возвращение к определениям есть важный мыслительный процесс. Если мы хотим понять, почему столь важны определения слов, надо сначала осознать, как важны сами слова. Мы едва ли смогли бы мыслить, не прибегая к помощи слов, или знаков, или тех или иных символов.

Поэтому слова и знаки обладают известной силой. Первобытные народы приписывают им магическую силу. Мы можем понять подобные верования, но мы, конечно, далеки от того, чтобы разделять их. Нам следует знать, что сила слов заключается не в их звуках, не в «vocis flatus», т. е. не в дуновении воздуха, производимом говорящим, а в понятиях, о которых слово напоминает, и, в конечном счете, в фактах, на которых зиждутся эти понятия.

Поэтому разумным является стремление искать смысл и факты, заключенные в словах. Возвращаясь к определениям, математик стремится познать действительные отношения между математическими объектами, скрытые за специальными терминами, так же точно, как физик стремится за специальными терминами увидеть определенные эксперименты или как обыкновенный человек, обладающий некоторой долей здравого смысла, склонен принимать в расчет лишь факты и не дать одурачить себя просто словами.

Осуществление плана. Выработать план и осуществить его — это две разные вещи. В известном смысле это верно и в применении к математическим задачам; между осуществлением плана решения и составлением его имеется определенная разница в характере работы.

1. В процессе поисков окончательной и строгой цепи умозаключений мы можем использовать временные и лишь правдоподобные рассуждения так же, как мы пользуемся строительными лесами, чтобы поддерживать мост в процессе его постройки. Однако когда строительство в достаточной степени продвинулось вперед, леса убираются, а мост остается стоять сам по себе. Так же точно, когда достаточно продвинуто вперед решение задачи, временные и лишь правдоподобные рассуждения устраняются, и результат находит опору лишь в безупречных по своей строгости умозаключениях.

В поисках плана решения мы не должны очень бояться и пусть лишь правдоподобных, эвристических рассуждений. Хорошо все то, что приводит нас к верной идее. Но эту точку зрения мы обязаны изменить, переходя к осуществлению