У. Гренандер

Лекции по теории образов

1 Синтез образов

Перевод с английского
И. Гуревича, Т. Дадашева

под редакцией
Ю. Журавлева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1979

U. Grenander

Pattern Synthesis

Lectures in Pattern Theory
Volume 1

Springer-Verlag
New York•Heidelberg•Berlin
1976

УДК 519

Первый том трехтомной монографии по построению общей теории распознавания образов посвящен разработке формальных средств для представления процессов порождения, преобразования и обработки образов. В основу организации процесса распознавания положено математическое изучение понятия «образ» и соответствующих моделей. Следует отметить оригинальность подхода автора к теории распознавания, высокий уровень математической строгости, новизну материала.

Второй том монографии предполагается выпустить в свет в 1981 году.

Книга рассчитана на специалистов по распознаванию образов, принятию решений и математическим методам обработки информации. Она может быть использована в качестве учебного пособия студентами и аспирантами соответствующих специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

1502000000

$Г \frac{20204-026}{041(01)-79}$ 26—79

Предисловие редактора перевода

Математическая теория распознавания образов является одиим из наиболее интенсивно развивающихся в последние десятилетия направлений прикладной математики и математической кибернетики.

Опыт решения значительного числа прикладных задач распознавания приводит к попыткам осмысления экспериментального материала и построению достаточно общих аспектов теории. Так возникли, в частности, статистическая теория распознавания и алгебраическая теория распознающих алгоритмов. В рамках последней советскими учеными рассматривались распознающие отображения (операторы), их свойства, а также возможности, связанные с алгебраическими расширениями простых базисных распознающих процедур. При этом не проводилось детального анализа структуры распознаваемых объектов или ситуаций, а основное внимание уделялось исследованию самих процессов распознавания.

В работах У. Гренандера основной упор делается именно на исследование структуры распознаваемых объектов. В предлагаемой читателям монографии делается попытка систематически изложить основания теории распознавания, ввести и изучить основные понятия этой теории и последовательно описать математический аппарат. Книга базируется на статьях автора, опубликованных им с 1969 года. Всего он предполагает написать три тома под общим названием «Лекции по теории образов». К настоящему времени первые два тома опубликованы. В первом томе — «Синтез образов» — последовательно проводится концепция, согласно которой распознаваемые объекты (изображения) всегда можно представить как набор элементарных объектов (образующих), соединяемых между собой разрешенными способами.

Вводятся также числовые характеристики распознаваемых объектов. Предлагаемое У. Гренандером описание давно применяется в различных разделах математической кибернетики (см., например, Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики. — В сб. Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959). Им соответствуют понятия «схема», «управляющая система» и т. д. Новым является понятие образа. Оно вводится следующим способом. На множестве объектов (схем) определяется полугруппа или группа преобразований. К одному образу относятся объекты, переводимые друг в друга этими преобразованиями. Таким способом задается разбиение множества распознаваемых объектов на классы эквивалентности (образы). Указанный подход к определению образа, безусловно, является интересным и позволяет строить математическую теорию распознавания с использованием алгебраических методов. Предложенное У. Гренандером определение образа охватывает значительное число прикладных задач, хотя, по-видимому, не является универсальным.

Автор вводит также понятия «наблюдение», «формальное описание объекта» и т. д. Под наблюдением понимается переход от реального объекта к формальному описанию. Наблюдение может проводиться с разной «степенью точности» и приводить к описаниям разного типа. Свойства наблюдения также учитываются при распознавании. Наконец, определяется совокупность деформаций, действующих на изображения.

Основная часть первого тома «лекций» состоит в описании элементарных блоков (образующих), способов их соединения и схем, получаемых соединением элементарных блоков (конфигураций).

Подробно разбирается большое количество примеров, причем примеры соответствуют реальным задачам распознавания. Детально описываются системы образующих, конфигурации и поясняются другие понятия, введенные в монографии. Большое внимание уделено построению и анализу мер над множествами изображений.

Во второй части (гл. 3, 4) рассматриваются алгебры изображений и деформации на образующих, конфигурациях и изображениях.

Материал изложен просто и доступно. В случаях, когда требуется применение трудного математического аппарата, автор часто лишь конспективно намечает путь исследования. Подробные доказательства при этом не проводятся.

Монография У. Гренандера, несомненно, представляет большой интерес для специалистов в области математической кибернетики, алгебры, математической логики. Она может также оказаться полезной для специалистов, интересующихся применениями теории распознавания к решению прикладных задач.

Перевод гл. 3 выполнен Т. М. Дадашевым, остальной материал перевел И. Б. Гуревич.

Ю. И. Журавлев

Предисловие

Книга основана на переработанных и существенно расширенных конспектах лекций. Рукопись была включена в серию «Прикладная математика», выпускаемую издательством «Springer-Verlag», за что я выражаю признательность Ф. Джону, Дж. П. Ласаллю, Л. Сировичу и Г. Уитаму.

Ряд моих коллег и студентов помогли мне своими замечаниями и предложениями, в частности Д. И. Маклур, И. Фролоу, Дж. Силверстайн, Р. А. Вайтал; особую благодарность мне хотелось бы выразить У. Фрайбергеру за всестороннюю поддержку и помощь.

Работа финансировалась Отделом математики и информатики Национального научного фонда, и я высоко оцениваю заинтересованность, проявлявшуюся в течение ряда лет со стороны Джона Паста, Кента Кертиса, Бруса Барнса и других директоров программы.

Я глубоко признателен И. Фонсика за ее неустанную и тщательную работу с рукописью, И. Адисон за квалифицированную подготовку множества диаграмм и К. Г. Эйвери, Д. П. Либатти, К. Макдугалл и С. В. Спиначчи за перепечатку окончательного варианта рукописи. Я с благодарностью отмечаю разрешение на перепечатку рисунков, как указано в тексте книги, А. Дж. Ларкину, М. Гарднеру, а также American Elsevier Publishing Company, Inc.

Я посвящаю эту работу моей жене — Эмме-Стине.

Июнь 1975 *Ульф Гренандер, Провиденс*

Введение

В данном томе предпринимается математическое изучение регулярных структур.

В 1966 г. на научной конференции в Лутраки, Греция, автор высказал предположение, что можно создать общую теорию образов, опираясь на ряд основополагающих концепций, которые были кратко охарактеризованы и проиллюстрированы несколькими простыми примерами. Предложение было представлено в виде исследовательской программы, реализация которой в то время только начиналась.

Ныне, девять лет спустя, значительная часть программы выполнена автором и его коллегами по Отделению прикладной математики Университета Брауна. Ее результаты будут представлены в серии книг, состоящих из нескольких томов, и данная книга является первым томом.

Второй том должен появиться вскоре после первого. Значительная часть работы, которой он посвящен, уже завершена, однако только часть фактически написана. В не столь отдаленном будущем третий, более обширный, том даст систематическое изложение теории. Предварительный вариант оглавления этого тома приведен в приложении. Предполагается, что этот том будет состоять из четырех частей, включающих двадцать глав. Данный том соответствует содержанию части II, гл. 3—6.

Чтобы избежать недоразумений, следует с самого начала подчеркнуть, что в этой книге не делается акцент на распознавание образов. Наша цель состоит не в том, чтобы выяснить, как образы распознаются в природе или как их следует распознавать с помощью алгоритмов и машин. Вместо этого объектом нашего изучения будут образы как таковые, рассматриваемые в рамках точного формализма, который будет использоваться в качестве концептуальной основы для синтеза и анализа образов, помогая нам лучше понять, как образы строятся и обрабатываются. В следующем томе этот аппарат будет использоваться систематически для описания, аппроксимации, восстановления и, в конечном счете, также и распознавания образов.

Как и в работе У. Гренандера (1967), исходными являются следующие четыре принципа. Теория будет *атомистической*: образы строятся из простых стандартных блоков — знаков или образующих. Это наши неделимые элементы или атомы, и в каждом конкретном случае они будут выбираться как можно более простыми. В качестве таких элементов могут выступать абстрактные символы, множества, отношения или функции, и в следующих главах читатель встретит большое разнообразие типов образующих.

Задав образующие, мы будем настаивать на введении определенных правил, ограничивающих способы их соединения между собой. Эти правила приводят к типичным регулярностям образов и представляют их *комбинаторную* структуру.

Получаемые в результате регулярные конфигурации являются абстрактными конструкциями, не обязательно наблюдаемыми во всех деталях. В какой степени регулярные конфигурации могут быть идентифицированы наблюдателем — зависит от системы *наблюдения*. Результаты наблюдения, соответствующие некоторому множеству регулярных конфигураций, называются изображением[1]). Основным предметом нашего исследования является множество изображений вместе с существующими между ними отношениями: алгебра изображений.

Изображение соответствует результатам наблюдения при идеальных условиях, если на наблюдения не оказывают влияния ограничения, свойственные используемой аппаратуре, и несовершенство модели. Теория образов, не учитывающая поведение образов в реальных условиях, будет иметь очень ограниченные приложения. Мы должны, следовательно, обеспечить *реалистичность* теории с тем, чтобы она могла оперировать реальными образами. Другими словами, нам следует рассмотреть процесс преобразования «чистых» образов в реальные с помощью некоторого механизма деформации.

---

[1]) При переводе монографии Гренандера для передачи на русском языке понятия «image» выбран термин «изображение». На самом деле здесь имеется в виду, пользуясь языком автора, «класс эквивалентности I на множестве правильных конфигураций $\mathscr{C}(R)$ в смысле правила идентификации R», т. е. формальное описание объекта распознавания или, короче, формальный объект. Такое описание соответствует наблюдениям в идеальных условиях; оно может быть точным настолько, насколько хорошо исследователь или «заказчик» знают свой объект. Следовательно, речь идет о потенциально достижимом описании объекта. «Изображение» в данном смысле не следует смешивать с употреблением этого термина, общепринятым в теории распознавания образов.

Термин «pattern» имеет у автора более общий смысл — он означает закономерность, явление, т. е некоторое обобщение понятия «образ». Ближе всего к нему по смыслу находится понятие «класс образов». — *Прим. ред.*

Мы будем изучать образы в общем виде — образы образов, однако обсуждение будет сделано как можно более конкретным при помощи соответствующих примеров. В качестве иллюстраций к примерам мы будем пользоваться диаграммами конфигураций, прибегая к ним на протяжении всей книги. Наш подход отнюдь не является по своей природе геометрическим; образы с тем же успехом могут быть логическими, включать последовательности или представлять поведение. У Бома (1969) читатель может найти интересные рассуждения о необходимости создания формальной теории образов, но с несколько иных позиций.

В части I более полной книги, которая появится позже (см. приложение), будет подробнее показано, как изучение образов, возникающих в науке и технике, искусстве и гуманитарных науках, заставило нас настаивать на необходимости четырех вышеупомянутых руководящих принципов, определяющих наш подход как атомистический, комбинаторный, учитывающий наблюдаемость и реалистический. Некоторую информацию по этому вопросу можно найти в работах Гренандера (1969), (1970).

В данном томе (соответствующем части II оглавления, приведенного в приложении) мы будем изучать, как из образующих при помощи комбинирования, идентификации и деформации формируются образы, т. е. мы будем рассматривать синтез образов. Большая часть тома посвящена анализу концепций и изучению логической структуры используемого нами формализма образов.

Следующий том будет посвящен обратной задаче — анализу образов. Там мы приступим к делу с противоположного конца — исходя из наблюдаемых реальных образов мы попытаемся описывать и анализировать их. На этом этапе характер обсуждения меняется, и оно становится более математическим и скорее «вычислительным», чем концептуальным, причем больше внимания уделяется эмпирическим результатам.

Читатель обнаружит, что в своей работе мы пытались использовать параллельно численные эксперименты и математический анализ. Часто мы предпринимали численное исследование для того, чтобы приобрести новое понимание на интуитивном уровне. Когда такой процесс приводил к возникновению какого-либо предположения, мы пробовали доказать справедливость этого предположения аналитически.

По мере продвижения нашей работы этот способ использования вычислительной машины для проведения математических экспериментов последовательно приобретал все большее значение. Было бы очень трудно, если не сказать — невозможно, обойтись без него. Значительная часть вычислений была выполнена в диалоговом режиме, на языке программирования АПЛ, с применением различных устройств машинной графики. Трудно в этом смысле переоценить роль эффективной диалоговой вычислительной системы.

При доказательствах мы иногда опускали некоторые моменты, связанные с теорией меры, и некоторые другие обстоятельства, когда это не приводило к значительной потере строгости. Иногда, однако, эти пропуски носят серьезный характер. В подобных случаях это указывается в явном виде, как, например, в разд. 2.10 и 3.6. Мы надеемся, что в будущем сможем устранить эти пробелы.

Из названия нашей книги очевидно, что мы будем изучать *теоретические* аспекты образов, и в первом томе приложения будут играть второстепенную роль. Будет ясно, однако, что основные побудительные мотивы этого исследования порождены различными областями: геоморфологией, анатомией, нейрофизиологией, спектрографией, антропологией и многими другими. Это влияние было доминирующим в развитии нашей теории.

Первые два тома следует рассматривать лишь как предварительное изложение результатов. Они содержат материал, используемый автором в своих лекциях в Университете Брауна. Лекции читались дважды как односеместровый курс и один раз — как двухсеместровый. Часть работы, выполненной нашей группой в Университете Брауна, отражена в тридцати пяти отчетах о научно-исследовательской работе (см. библиографию), однако лишь отдельные небольшие фрагменты были опубликованы. Теория находится еще в начальной стадии, но в последние несколько лет переживает бурное развитие; несомненно, что этот быстрый рост будет продолжаться по мере приложения ее к новым областям.

Изложение не столь отшлифовано и аккуратно, как этого можно было бы желать, и, следовательно, вполне возможно, что данный том содержит некоторые неясности, ошибки и непоследовательности. Следует также отметить, что теория образов — это совершенно новое направление прикладной математики, и было бы неразумно на этой стадии ожидать чего-либо иного. Автор с благодарностью примет замечания, советы и исправления.

Глава 1

Образующие

1.1. Образующие и их свойства

Непроизводные объекты, используемые для построения конфигураций и изображений, назовем *образующими.* Множество образующих будем обозначать через G, символом для отдельного первичного элемента будет служить g, $g \in G$.

Образующие представляют собой элементы — носители информации, и так как они имеют значение неких первичных высказываний, то иногда мы будем называть их *знаками.*

Множество всех образующих G состоит из непересекающихся *классов образующих* G^{α}, $G^{\alpha} \subset G$, где α — общий индекс, *индекс класса образующих,*

$$G = \bigcup_{\alpha} G^{\alpha},\ G^{\alpha} \text{ — непересекающиеся классы.} \qquad (1.1.1)$$

Интерпретация этого разбиения состоит в том, что образующие, сходные качественно, будут относиться к одному классу (см. разд. 3.2).

Образующие — это простейшие объекты, некоторые стандартные блоки. Они могут обладать определенными свойствами, и если они ими действительно обладают, то свойства эти могут быть двух типов.

Первый тип свойств — это *признаки.* Образующей ставится в соответствие признак $a = a(g)$, причем в качестве значений признака a могут выступать целые числа, действительные числа, векторы и так далее. Одной из составляющих признака служит индекс класса образующей α, однако обычно он располагает и другими составляющими, представляющими более специфическую информацию.

Второй тип свойств охватывает *связи*[1]). Определенной образующей g соответствует определенная *арность* $\omega(g)$, которая выражается неотрицательным целым числом или бесконечностью. Величина арности указывает максимальное число соединений, связывающих данную образующую с остальными. Реализация подобных соединений — предмет обсуждения гл. 4.

[1]) В оригинале bonds. В данном случае термин «связи» означает лишь входные и выходные узлы для возможных соединений (connections) между образующими. — *Прим. ред.*

Величина арности представляет собой сумму *входной арности* $\omega_{\text{in}}(g)$ и *выходной арности* $\omega_{\text{out}}(g)$:

$$\omega(g) = \omega_{\text{in}}(g) + \omega_{\text{out}}(g). \qquad (1.1.2)$$

Эти показатели характеризуют максимальное число соединений, входящих в образующую и выходящих из нее соответственно.

Каждому подобному (потенциально возможному) соединению соответствует *показатель связи*, обозначаемый обычно символом β с соответствующим нижним индексом. Как мы убедимся в следующих разделах, характер показателей связи β существенно изменяется в зависимости от того, на какую прикладную область мы в каждом конкретном случае ориентируемся.

Множество связей всякой образующей g, соответствующим образом перенумерованное, образует *структуру связей* образующей. Структура связей не определяет значения показателей, поставленных в соответствие отдельным связям.

В дополнение к свойствам образующих необходим также *идентификатор* или имя для того, чтобы иметь возможность различать используемые образующие.

Сделаем оговорку относительно равенства образующих. Может потребоваться, чтобы некоторая образующая входила в одну и ту же конфигурацию более одного раза. В таком случае берутся идентичные копии этой образующей, которые различаются при помощи идентифицирующих меток, вводимых в признак в качестве составляющих. Из контекста будет ясно, когда это делается.

Мы будем пользоваться *графическим формализмом, таким,* как на рис. 1.1.1, для того, чтобы дать интуитивное представление о свойствах образующих. На этом рисунке входная арность равна 2, соответствующие показатели связей — β_1 и β_2, и выходная арность — 3, соответствующие показатели связей — β_3, β_4 и β_5, так что общая арность равна 5.

Это графическое представление не следует рассматривать как образующую, окруженную своими связями, — связи являются частью собственно образующей.

При решении большинства прикладных задач мы будем иметь дело с некоторыми отображениями множества образующих G в себя, которые не будут существенно влиять на информацию, содержащуюся в образующих. Эти отображения представляют собой *преобразования подобия* и должны удовлетворять следующему определению.

Определение 1.1.1. Будем считать, что множество S отображений s: $G \to G$ образует множество преобразований подобия, если:

(i) множество S является полугруппой с единицей относительно композиции преобразований;

(ii) Любое $s \in S$ отображает G^{α} в себя при любом индексе класса образующих α;

(iii) множество S не влияет на связи (но может влиять на показатели связей).

Отметим, что показатели связей преобразованной образующей sg могут отличаться от показателей связей исходной образующей g.

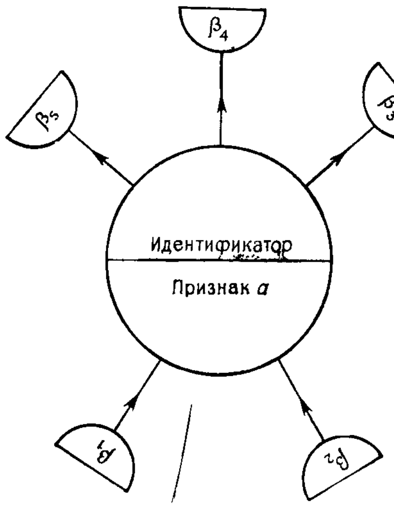

Рис. 1.1.1.

Мы считаем образующие атомами, неделимыми объектами, однако, подобно тому как атомы обладают внутренней структурой и могут расщепляться на элементарные частицы, образующие в свою очередь иногда допускают разбиение на более мелкие единицы. В самом деле, ниже (гл. 3) мы убедимся в том, что иногда будет вполне естественно объекты, являющиеся на некотором уровне формального описания изображениями, считать образующими в формализме более высокого уровня. Независимо от того, работаем ли мы с подобной иерархической структурой или нет, на любом уровне образующая будет рассматриваться как непроизводный элемент.

Определить образующую можно двумя способами. Простейший — и наименее интересный — задание образующей *в абстрактном виде*, безо всякого учета среды, в которой она (быть может) действует. В этом случае образующая просто обозначается неким отвлеченным символом. Противоположный случай, с которым мы будем часто сталкиваться, — определение образующих *на некоторой среде* — носителе информации. В этом случае образующая имеет конкретную интерпретацию. Ничто не препятствует нам использовать в одном и том же формальном описании образа и абстрактные, и конкретные образующие (см., например, случай 3.4.3), хотя возникать такая ситуация будет редко.

Иногда мы будем использовать образующую, обозначаемую через ε, обладающую специальными свойствами и называемую нулевой образующей. При этом будет допускаться принадлежность нулевой образующей ε ко всем классам, так что эти классы уже не будут непересекающимися в строгом смысле слова.

Мы намерены рассмотреть множество образующих самых различных видов. Для того чтобы дать читателю представление о некоторых возможностях в этом отношении, в следующих двух разделах мы приведем несколько примеров, не определяя, однако, связи, поскольку последнее более естественно делается в гл. 2 при обсуждении способов соединения образующих в конфигурации. Поэтому описание образующих, представленное в разд. 1.2 и 1.3, не является исчерпывающим.

Рассмотрим отображение h: $G \to G'$, где G и G' — два множества образующих, связанные с одной и той же полугруппой преобразований подобия S. Будем называть отображение h *инвариантом связей*, если для любой образующей $g \in G'$ образующие g и $g' = h(g)$ имеют одни и те же связи и показатели связей и $sg \to sg'$ для всех s и g.

С помощью такого отображения можно заменять образующие элементы множества G образующими множества G', не нарушая комбинаторную структуру.

1.2. Абстрактные образующие

В примерах данного раздела образующие задаются абстрактно, без каких-либо указаний о характере среды, в которой они могут интерпретироваться.

Случай 1.2.1 (свойства). Множество образующих представляет собой список символов, например заглавных букв:

$$G = \{A, B, C, D, \ldots\}, \tag{1.2.1}$$

где $g = A$ является высказыванием, означающим, что некоторое свойство A применимо для описания заданной ситуации, скажем A — «красный», B — «голубой», C — «большой», D — «не голубой» и т. д. Преобразования подобия строятся на основе операций тождества и отрицания, применяемых к любой образующей. Выделение классов образующих приводит к отнесению свойств, характеризующих цвет, в один класс, размер в другой и т. д.

В качестве еще одного примера множества образующих можно привести множество $G=\{♂, ♀\}$, которое присутствует в образах, характеризующих происхождение и встречающихся, в частности, в популяционной генетике. В последнем случае признаки выражают генетические характеристики, представляемые образующими.

Случай 1.2.2 (код Морзе). В данном случае $G = G^1 \cup G^2$, где

$$G^1=\{\text{точка, тире}\},$$
$$G^2=\{\text{короткая пауза, пауза после буквы, пауза после слова}\}. \tag{1.2.2}$$

Признак a определяется как

$$\begin{aligned} &a\ (\text{точка})=1,\\ &a\ (\text{тире})=3,\\ &a\ (\text{короткая пауза})=1,\\ &a\ (\text{пауза после буквы})=3,\\ &a\ (\text{пауза после слова})=5. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Это одна из систем, определяющих код Морзе. Значение этого признака, несомненно, выражает продолжительность образующей (в некоторых единицах измерения времени), однако в данном разделе мы рассматриваем образующие лишь как символы, не придавая им никакого физического смысла. Сигналам и паузам соответствуют два класса образующих. Преобразования подобия будут введены впервые, когда будет установлена интерпретация для данного случая.

Случай 1.2.3 (химические элементы). В этом случае множество образующих может иметь вид

$$G=\{H, He, Li, Be, B, \ldots\} \tag{1.2.4}$$

и одна из функций признаков, атомный вес, будет принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1{,}00\\ a(He) &= 4{,}00\\ a(Li) &= 6{,}94\\ a(Be) &= 9{,}01\\ a(B) &= 10{,}8\\ &\ldots \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Случай 1.2.4 (формальный язык). Рассмотрим простой пример:

$$G = G^1 \cup G^2, \tag{1.2.6}$$

где G^1 — конечный список символов (представляющих булевы переменные) и

$$G^2 = \{\wedge, \vee, \tilde{},), (\}. \tag{1.2.7}$$

Этот пример иллюстрирует важность оснащения образующих связями. Если ограничиться при определении образующих только выражениями (1.2.6) и (1.2.7), то окажется невозможным присоединить к ним связи и сформировать полезные конфигурации. При введении связей следует провести более тонкое разбиение множества образующих G, но об этом речь пойдет в разд. 2.6.

Случай 1.2.5 (естественный язык). Множество образующих задается словарем, классами G^α служат классы слов, а признаками могут являться число, род, падеж и тому подобные категории с соответствующими диапазонами изменения. К этому способу задания образующих можно предъявить те же претензии, что высказывались в связи с предыдущим случаем.

1.3. Конкретные образующие

Нам не очень часто придется иметь дело с абстрактными образующими. Обычной является ситуация, когда образующая определена применительно к некоторой среде X. *Опорное пространство*, X, может быть практически любым: прямая, многомерное евклидово пространство, гильбертово пространство или подмножество любого из этих пространств.

В опорном пространстве можно задать определенные преобразования $X \to X$, которые можно использовать для определения инвариантных свойств образов. Они должны образовывать полугруппу с единицей и индуцировать на множестве образующих G отображения, которые будут рассматриваться как преобразования подобия. Для обозначения обоих отображений $X \to X$ и $G \to G$ удобно использовать одни и те же символы s и S.

Определение 1.3.1. *Если образующие являются элементами опорного пространства X, то они называются точечными образующими.*

Случай 1.3.1 (числовые признаки). Пусть $X = R$ и образующая состоит из идентификатора и значения в R; s-преобразования заключаются в изменениях масштаба $x \to kx$, $k > 0$.

В качестве идентификаторов можно использовать длину, ширину, частоту и тому подобное. Следует отметить, что преобразование подобия s может затронуть только один класс образующих и оставить остальные образующие без изменений, причем значения k могут быть разными для разных классов.

Аналогичным образом может возникнуть необходимость определить S как прямое произведение различных S^α, соответствующих различным индексам классов образующих α. Для числовых признаков, не имеющих наиболее предпочтительной точки отсчета, как, например, при измерении местоположения, в качестве S^α может быть принята группа переносов. Для других случаев с приоритетными точками отсчета, например при измерениях размера, вышеупомянутые изменения масштаба могут образовать естественное множество S^α.

Весьма близок описанному

Случай 1.3.2. Логические признаки: опорное пространство $B=\{0,1\}$, образующая имеет идентификатор и принимает значения 0 или 1. Преобразования подобия включают тождество и операцию $x \to 1-x$.

Определение 1.3.2. *Если образующие являются подмножествами опорного пространства X, то они называются образующими-множествами.*

В этом случае преобразования подобия очевидным образом расширяются от X к G посредством поточечного применения.

Случай 1.3.3 (выпуклые множества). Пусть $X=R^l$ и G — семейство всех выпуклых множеств в пространстве R^l и $S=EG(l)$ — евклидова группа в l-мерном пространстве.

Как мы убедимся ниже, такие образующие естественно относить ко второму уровню иерархии, а образующими первого уровня служат полуплоскости (см. разд. 3.5).

Случай 1.3.4 (сферы). Пусть $X=R^3$ и G^α состоит из сфер с произвольным центром (x_1, x_2, x_3) и радиусом r^α, причем всякий $r^\alpha > 0$. Преобразования подобия заключаются в применении $EG(3)$ к сфере (x_1, x_2, x_3).

Случай 1.3.5 (планиметрия). В данном случае $X=R^2$ и

$$\left.\begin{array}{l} G^{(1)} \text{ включает все точки;} \\ G^{(2)} \text{ включает все прямые, лучи, отрезки прямых;} \\ G^{(3)} \text{ включает все окружности и дуги окружностей;} \end{array}\right\} \qquad (1.3.1)$$

S включает $EG(2)$ и равномерные изменения масштаба.

Случай 1.3.6 (признаки). Рассмотрим опорное пространство X и семейство F — ложный, T — истинный. Подмножество вида

$$g^f = \{x \mid f(x) = T\} \tag{1.3.2}$$

называется образующей-признаком. Полагаем, что S состоит только из тождества и дополнения. Характер $\mathcal{F}$ будет, естественно, зависеть от приложений и изменяться от одного случая к другому.

Случай 1.3.7 (мозаики). Пусть $X = R^2$. Рассмотрим его разбиение на множества g, такие, что все g конгруэнтны по модулю заданной дискретной группы переноса. Эта группа выполняет роль S.

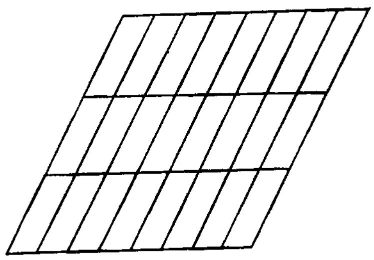

Рис. 1.3.1.

Соответствующий пример приведен на рис. 1.3.1, где группа переносов образована переносами $(x_1, x_2) \to (x_1 + k_1 + 2k_2, x_2 + 2k_2)$, k_1 и k_2 — целые числа. Образующими являются изображенные на этом рисунке параллелограммы.

Случай 1.3.8 (объекты, находящиеся в некоторой внешней среде). Рассмотрим в R^3 множество объектов g. Эти объекты задаются при помощи указания их формы, местонахождения и ориентации. Некоторые формы составляют класс образующих. В качестве других признаков могут рассматриваться цвет, запах, текстура. Естественными преобразованиями подобия снова являются преобразования, составляющие $EG(3)$.

Случай 1.3.9 (дуги). Пусть G — совокупность аналитических дуг в $X = R^2$ и $S = EG(2)$. Каждая дуга описывается уравнением $\rho = \rho(l)$, где ρ — кривизна, а l — длина дуги. Множество аналитических функций $\{\rho^\alpha\}$ задано, и дуга $g \in G^\alpha$, если имеется ее уравнение $\rho = \rho^\alpha(l)$ на некотором отрезке l. Общая длина дуги является еще одним признаком образующей такого типа.

Случай 1.3.10 (стрелки). Пусть g — упорядоченная пара (x_1, x_2) в некотором топологическом пространстве X, рассматриваемая как стрелка, проведенная из x_1 в x_2. Пусть S состоит из топологических отображений X на себя и расширенное определение s имеет вид $(x_1, x_2) \rightarrow (s(x_1), s(x_2))$.

Очевидно, что точечные образующие являются частным случаем образующих-множеств, если точку в X отождествить с подмножеством, содержащим только эту точку.

Теперь мы переходим к рассмотрению того типа образующих, который встречается чаще всего.

Определение 1.3.3. *Пусть образующие состоят из отображений опорного пространства X в сопоставленное пространство Y. В этом случае мы говорим об образующих-соответствиях или образующих-функциях.*

В частности, мы будем говорить о линейных (часто временных), плоскостных или пространственных образующих в тех случаях, когда X является действительной прямой, плоскостью или трехмерным евклидовым пространством соответственно.

Если g — отображение $y = g(x)$ и S — группа преобразований подобия, мы будем определять sg с помощью отображения $y = g(s^{-1}x)$.

Если образующая-соответствие $g = g(x)$ определена только на подмножестве $E \subset X$, то мы будем определять sg, имея в виду сужение функции $g(s^{-1}x)$ на множество sE.

Случай 1.3.11 (уровень зачерненности). Если Y — положительная действительная прямая или ее подмножество, то образующие-соответствия можно рассматривать как полутоновые изображения.

Случай 1.3.12 (цветные изображения). Если Y — положительный октант R^3, то соответствующие образующие-соответствия можно рассматривать как трехцветные изображения, причем каждая координата указывает интенсивность красного, зеленого и синего цветов соответственно.

Случай 1.3.13 (ортогональные образующие). Пусть $Y = R^1$ и μ — мера на X. Мы говорим об ортогональных образующих, если $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$, где g_ν — ортогональные относительно μ функции в геометрии $L_2(\mu)$.

Случай 1.3.14 (сигналы). Пусть X и Y — действительные прямые и G — заданное множество действительных функций на X, удовлетворяющих условию $L^\alpha g = 0$, где L^α — заданный линейный дифференциальный оператор, который не содержит x при всех значениях индекса образующей α. S — группа переносов на X.

Модификация последнего случая приводит к появлению нового элемента, который, как мы увидим, играет решающую роль при синтезе конфигураций.

Случай 1.3.15 (суженный класс сигналов). То же самое, что и в предыдущем случае, за исключением того, что рассматривается сужение решения $L^{\alpha}g = 0$ на некоторый интервал $[a, b]$. Этот интервал не фиксируется и может изменяться в соответствии с характером образующей, так что значения a и b являются признаками g.

Более общим вариантом случая 1.3.15 является многомерный.

Случай 1.3.16 (суженный класс образующих-соответствий). Пусть в опорном пространстве $X = R^k$ непрерывные действительные функции g определены на замкнутых подмножествах, принадлежащих к семейству множеств, замкнутому относительно переносов в X. Эти переносы образуют также группу подобия на G.

Теперь мы обратимся к более специальному случаю, который также будет расширен и обобщен.

Случай 1.3.17 (арифметические операторы). Пусть $X = Y$ — действительная прямая и всякая g — функция, определенная на некотором подмножестве $X_g \subseteq X$ и принимающая значения из некоторого подмножества $Y_g \subseteq Y$.

Как и прежде, мы считаем, что X_g и Y_g являются частями образующей.

В качестве более общего многомерного аналога вводим в рассмотрение

Случай 1.3.18 (универсальные операторы). Всякая образующая есть оператор с ν (переменными) входами $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}$ и μ (переменными) выходами $y_1\ y_2, \ldots, y_{\mu}$. Область значений всякого x_i есть некоторое пространство X_i, область значений всякого y_j — некоторое пространство Y_j. В частности, существуют *операторы назначения*, не имеющие входов (однако обычно обладающие некоторыми признаками). Преобразования подобия воздействуют только на операторы назначения, оставляя все остальные образующие без изменения. В результате реализации этих преобразований признаки оператора назначения обычно изменяются, однако мы потребуем, чтобы α изменялся, а области X и Y — не увеличивались.

Мы будем снова и снова обращаться к этому случаю в связи с его исключительной пластичностью. Отметим его следующий частный вариант.

Случай 1.3.19 (операторы со случайными переменными). Этот случай полностью соответствует случаю 1.3.18, за исключением того, что X_i и Y_j определены как множества случайных переменных.

Позже нам встретится еще один частный случай:

Случай 1.3.20 (проекции). Пусть $X = Y$ — сепарабельное действительное гильбертово пространство H, и пусть образующие являются кратными операторов проектирования P, $g = kP$, $k \in R$, где P, появляющиеся в двух образующих, либо равны, либо ортогональны. Полугруппа преобразований подобия формируется из умножений на (действительные) скалярные велнчины. Классы образующих определяются в терминах пропорциональности P.

Образующие-множества являются частными случаями образующих-функций, если подмножества определяются в терминах своих индикаторных функций.

Эти три типа образующих не исчерпывают всех возможных случаев, которые мы будем изучать. Отметим только один дополнительный пример, который будет представлять для нас интерес.

Случай 1.3.21 (меры в качестве образующих). Рассмотрим в топологическом векторном пространстве X некоторую σ-алгебру $\mathcal{A}$ борелевских подмножеств X и совокупность G мер, определенных на $\mathcal{A}$. Пусть S — множество операций на мере g, индуцированное переносами X.

Пусть G состоит из образующих-соответствий, т. е. g — функция, определенная на некотором подмножестве X^g опорного пространства X, и пусть в данном случае S — группа. Естественно, семейство $\mathcal{F}(G)$ областей X^g должно быть замкнуто относительно S. Пусть B является S-инвариантным подмножеством X, пусть *связи определяются через X^g и показатели связей g могут быть однозначно определены при известных значениях $g = g(x)$ для $x \in X^g \cap B$.* Другими словами, если две образующие имеют одну и ту же область определения, то их показатели связей одинаковы, когда обе функции совпадают на тех точках B, где они определены.

Определим теперь новое множество G' образующих, введя S-инвариантное подмножество $X_0 \subset X$, $B \subset X_0$, и положив, что новые образующие g' есть функции, определяемые на подмножествах X_0. Точнее, для всякого $g \in G$ мы определяем новую образующую g' как сужение g на $X^g \cap X_0$, причем структура связей остается прежней.

Если и g_1, и g_2 отображаются в $g' \in G'$, то мы должны получить $X^{g_1} \cap X_0 = X^{g_2} \cap X_0$, откуда следует $X^{g_1} \cap B = X^{g_2} \cap B$.

Итак, g_1 и g_2 обладают не только одними и теми же связями, но и одинаковыми показателями связей. Из построения $(sg_1)'$ и $(sg_2)'$ следует, что они обладают одинаковой структурой связей, и так как, будучи функциями, определенными на X_0, они равны, то они представляют один и тот же элемент в G'. Следовательно, sg' однозначно определено и s оставляет неизменными связи в G: S, как определено в G', является однозначно определенной и представляет собой вполне дозволенную группу преобразований подобия.

Отсюда следует, что отображение $G \to G'$ сохраняет структуру связей и $(sg)' = sg'$, т. е. это отображение является инвариантом связей.

В последующих главах частные случаи этой конструкции будут встречаться нам в различных формах.