Д. ПОЙА

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Перевод с английского

Под редакцией *Ю. М. ГАЙДУКА*

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1959

когда вам надо высказать две мысли. Выскажите сначала одну, затем другую, не говорите обе одновременно.

Практические задачи во многих отношениях отличаются от чисто математических задач, однако основные мотивы и ход их решения по существу одни и те же. Прикладные инженерные проблемы обычно включают в себя математические задачи. Остановимся вкратце на различиях, общих чертах и связях, существующих между этими типами задач.

1. Внушительную прикладную задачу представляет собой строительство плотины на реке. Не надо иметь никаких специальных знаний, чтобы понять эту проблему. Чуть ли не в доисторические времена, задолго до нашего современного века научных теорий, люди строили различные плотины в долине Нила и в других частях света, где урожай зависел от орошения.

Представим себе мысленно круг вопросов, связанных со строительством крупной современной плотины.

Что неизвестно? В проблеме такого рода неизвестных много: точное расположение плотины, ее геометрическая конфигурация и размеры, строительные материалы, которые будут использованы на сооружение плотины, и т. д.

В чем состоит условие? Одним кратким предложением невозможно ответить на этот вопрос, ибо условий много. В такого рода проекте необходимо удовлетворить многим важным экономическим требованиям и по мере возможностей минимально пренебрегать другими. Плотина должна обеспечить электроэнергией, давать воду для орошения и коммунальных нужд, а также контролировать уровень воды при паводке. С другой стороны, она должна возможно меньше нарушать навигацию и условия жизни ценной рыбы, а также красоту природы и т. д. И, разумеется, она должна быть построена с минимальной стоимостью и в максимально сжатые сроки.

Что дано? Количество данных, которые желательно было бы иметь, огромно. Нам нужны топографические данные о районе реки и ее притоков; необходимы геологические сведения, что важно для создания устойчивых фундаментов и для выяснения возможностей утечки воды и выявления наличия строительных материалов; метеорологические данные о количестве ежегодных осадков и уровне паводков; экономические данные о стоимости земельных участков, подлежащих затоплению, данные о стоимости строительных материалов, рабочей силы и т. д.

Из нашего примера видно, что по сравнению с математической задачей в прикладной задаче неизвестные данные и условия составляют более сложный комплекс и менее четко очерчены.

2. Для того чтобы решить какую-нибудь задачу, мы должны иметь определенный запас ранее накопленных знаний. В распоряжении современного инженера имеются современная техника, к его услугам — научная теория сопротивления материалов, собственный опыт и специальная техническая литература, в которой накоплен огромный инженерный опыт. Мы не можем здесь вникать в сущность этих специализированных сведений, но мы можем попытаться представить себе мысли древнеегипетского строителя плотины.

Ему, конечно, приходилось видеть различные другие, возможно, меньшие плотины: земляные или каменные насыпи, сдерживающие воду. Он наблюдал, как паводок с наносными породами обрушивался на плотину. Возможно, ему приходилось принимать участие в починке трещин и ликвидировать последствия от размыва насыпи паводком. Может быть, ему приходилось видеть, как под напором потока воды разрушается плотина. Он, несомненно, слышал рассказы о плотинах, выдержавших испытания веков или принесших бедствия из-за неожиданно образовавшихся брешей. Быть может, он мысленно рисовал себе картину давления воды реки на поверхность плотины и ее внутреннее напряжение и сжатие.

У строителя египтянина, однако, не было точных, количественных, научных представлений о давлении жидкости или о деформациях и напряжениях внутри твердого тела. Такие представления занимают существенное место в научной подготовке современного инженера. Инженер, однако, тоже пользуется обширными сведениями, не получившими еще совсем точного и научного освещения, его сведения о разрушительной силе течения воды, о переносе ила и об упругости и других менее четко очерченных свойствах твердых тел представляют собой знания скорее эмпирического характера.

Из нашего примера видно, что по сравнению с математической задачей в прикладной задаче понятия и те знания, которые необходимы для ее разрешения, имеют более сложный характер и менее четко определены.

3. В прикладных задачах неизвестные, данные, условие, понятия, необходимые предварительные знания — все сложнее и менее определенно, чем в чисто математических задачах. Это очень существенное различие, пожалуй, даже главное различие, и оно, несомненно, влечет за собой и другие различия. Однако основные мотивы и приемы решения оказываются одинаковыми для задач обоих типов.

Существует распространенное мнение, что прикладные проблемы требуют большего опыта, чем математические задачи. Возможно, это и так. Однако очень вероятно, что различие заключается в природе требуемых знаний, а не в нашем отношении к задаче. Решая задачу того или иного типа, мы должны опереться на свой опыт решения подобных задач и часто задавать такие вопросы: *не встречалась ли вам раньше эта задача? Хотя бы в несколько другой форме? Известна ли вам какая-нибудь родственная задача?*

При решении математической задачи мы исходим из очень четких понятий, систематизированных в нашем уме. При решении же прикладной проблемы нам часто приходится исходить из довольно туманных представлений. Позже уточнение этих представлений может стать существенной частью задачи. Так, например, сегодня медицина в состоянии сдержать распространение инфекционных заболеваний более эффективно, чем во времена до Пастера, когда представление об инфекционных болезнях было довольно туманным. *Приняли ли вы во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?* Это очень хороший вопрос для задач всех типов, но использование его зависит в значительной мере от характера понятий, входящих в задачу.

В точно сформулированной математической задаче все данные и все пункты условия существенны и должны быть учтены. В прикладных проблемах имеется обилие данных и условий. Мы учитываем столько их, сколько возможно, но некоторыми мы вынуждены пренебрегать. Возьмите случай со строителем большой плотины. Он принимает во внимание общественные интересы и учитывает важные экономические соображения, но он вынужден пренебрегать мелкими претензиями и обидами. Количество данных в его проблеме, строго говоря, неисчерпаемо. Ему, например, желательно было бы иметь кое-какие дополнительные сведения о геологической природе грунта, на котором должен быть уложен фундамент, но в конце концов он вынужден прекратить сбор геологических данных, хотя в этом вопросе неизбежно останется ряд неясностей.

Все ли данные вы использовали? Все ли условия использовали? При решении чисто математических задач нельзя обойтись без этих вопросов. Однако при решении прикладных проблем эти вопросы следует ставить в несколько видоизмененной форме: все ли данные вами использованы, которые *могли бы заметно содействовать решению?* Использовали ли вы все условия, которые могут *заметно повлиять на решение?* Мы собираем все доступные данные, имеющие отношение к нашей проблеме. Если необходимо, собираем дополнительные сведения, но в конце концов приходится прекращать сбор сведений. На каком-то этапе мы должны подвести черту. Невозможно не пренебречь кое-чем. «Волков бояться — в лес не ходить». Довольно часто накапливаются излишние данные, которые не имеют заметного влияния на окончательный вид решения.

4. Конструкторы древнеегипетских плотин при толковании своего опыта должны были положиться на собственный здравый смысл, больше им не на что было полагаться. Современный инженер не может положиться лишь на здравый смысл, в особенности, если его проект отличается смелым новаторством. Он обязан рассчитать сопротивление проектируемой плотины, точно предусмотреть внутреннее напряжение и сжатие плотины. Для этого ему приходится обращаться к теории деформации (которая довольно точна для цементных конструкций). Чтобы использовать эту теорию на практике, ему потребуется произвести множество математических расчетов — прикладная инженерная задача приводит к математической задаче.

Такая математическая задача не может быть рассмотрена здесь, ибо она слишком узкотехнического характера; ограничимся лишь общими замечаниями. При составлении и решении математических задач, полученных в ходе решения прикладной задачи, мы обычно довольствуемся приближенным решением. В прикладной проблеме мы вынуждены пренебрегать некоторыми второстепенными данными и условиями. Поэтому разумно допустить некоторые незначительные погрешности в расчетах, особенно если в упрощении выгадываем то, что проигрываем в точности.

5. О приближенных решениях можно было бы рассказать много интересного, заслуживающего внимания широкого круга читателей. Однако мы не можем предполагать у

читателя какой-либо специальной математической подготовки и поэтому ограничимся лишь одним понятным, доступным и поучительным примером.

Большое практическое значение имеет изготовление географических карт. При создании карт мы часто считаем, что земля шар. Между тем ведь это приближенное допущение, а не точная истина. Поверхность земли не представляет собой математически заданной поверхности. Если мы примем, что земля представляет собой шар, нам будет значительно легче сделать географическую карту. От упрощения мы очень много выигрываем, а в точности не очень теряем. В самом деле, представим себе большой глобус, у которого форма точно такая же, как у земли. Диаметр этого шара в экваторе 7,5 *м*. Расстояние между полюсами такого глобуса меньше 7,5 *м*, ибо земля сплюснута у полюсов, но разница составляет всего лишь около 2,5 *см*. Таким образом, шар представляет собой хорошее практическое приближение.

Проверка по размерностям — известный способ быстро и эффективно проверять геометрические и физические формулы.

1. Чтобы вспомнить, как проводится такая проверка, рассмотрим пример с прямым круговым усеченным конусом. Пусть имеем прямой круговой усеченный конус, причем

R — радиус нижнего основания,
r — радиус верхнего основания,
h — высота усеченного конуса,
S — площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Если R, r и h даны, то S можно легко выразить через R, r и h. Так мы находим выражение

$$S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2},$$

к которому применим метод проверки по размерностям.

Легко определить размерность геометрической величины. Так как R, r и h выражают длину, то они измеряются в единицах длины. Если пользоваться научной системой мер, то их размерность *см*. Площадь S измеряется квадратными единицами и ее размерность *см*^{2}. А $\pi=3,1415...$— просто число. Если мы хотим приписать числу размерность, то она должна быть *см*$^0=1$.

Рассматриваем размерности. Поскольку T есть время, а оно измеряется секундами, его размерность — секунды. Размерность длины l — *см*, размерность ускорения g — *см. сек*$^{-2}$, а размерность числового постоянного c есть 1. Проверка по размерностям дает уравнение

$$\text{сек.} = 1\,(\text{см})^m\,(\text{см}\cdot\text{сек.}^{-2})^n$$

или

$$\text{сек.} = (\text{см})^{m+n}\cdot\text{сек.}^{-2n}.$$

Но степени основных единиц *см* и сек. в обеих частях должны быть одинаковы и, таким образом, получаем:

$$0 = m + n \text{ и } 1 = -2n,$$

откуда

$$n = -\frac{1}{2}, \text{ а } m = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, формула для периода T должна иметь вид:

$$T = cl^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В этом случае проверка по размерностям дает немало, но не может дать всего. Во-первых, она не дает никаких сведений о численном значении постоянной величины c (которое равняется 2π). Во-вторых, она ничего не говорит о пределах, в которых формула применима. Эта формула справедлива при небольших отклонениях маятника и то лишь приближенно (она точна при «бесконечно малых» отклонениях). Несмотря на эти ограничения, нет сомнения, что рассмотрение размерностей позволило нам средствами элементарнейших приемов быстро предвидеть очень существенную часть решения, исчерпывающее изучение которого требует более серьезных приемов. И это справедливо в отношении многих подобных случаев.

Продвижение и достижение. Вы продвинулись в решении задачи? В чем суть вашего достижения? Вопросы такого рода мы можем задавать как себе, когда мы сами решаем задачу, так и учащемуся, решающему ее под нашим руководством. Мы привыкли более или менее уверенно судить о продвижении и о достижениях в конкретных случаях. Но перейти от таких конкретных случаев к обобщенному изложению вопроса очень нелегко. Однако, если мы желаем изложить учение об эвристике более или менее полно, мы должны попытаться уяснить себе, из чего состоит в общих чертах продвижение и достижение при решении задач.

1. Чтобы решить какую-нибудь задачу, мы должны иметь определенный запас знаний в той области, к которой наша задача относится, и нам приходится собирать и отбирать все имеющиеся у нас сведения, связанные с нашей задачей. Эти сведения до начала решения были лишь потенциальными. Наше понимание задачи значительно полнее в конце, чем оно было, когда мы только приступали к ней; что добавилось? То, что нам удалось вспомнить. Для того чтобы решить задачу, нам приходится припоминать различные существенные факты. Если наша задача математическая, приходится вспомнить ранее решенные задачи, знакомые теоремы, определения. Восстановление в памяти сведений, относящихся к задаче, можно назвать *мобилизацией*.

2. Однако, чтобы решить какую-нибудь задачу, недостаточно вспомнить изолированные сведения, мы должны комбинировать эти факты, и их комбинация должна быть хорошо приспособлена к решению имеющейся у нас задачи. Таким образом, при решении математической задачи мы должны объединить все, что мы вспомнили, и на этом основании выдвинуть такой отдельный довод доказательства, который был бы хорошо приспособлен к целому. Эту работу по приспособлению и комбинированию фактов можно назвать *организацией*.

3. По существу, отделить мобилизацию от организации невозможно. Сосредоточивая все свое внимание на задаче, мы припоминаем лишь те факты, которые более или менее связаны с нашей задачей, и соединяем и организуем лишь то, что вспомнили и мобилизовали.

Мобилизация и организация лишь два *аспекта* одного и того же сложного процесса, имеющего еще много других аспектов.

4. Другой аспект продвижения в работе заключается в том, что *характер нашего понимания задачи меняется*. Понимание задачи у нас значительно полнее в конце, чем оно было вначале, когда мы только приступали к решению, ибо добавилось все, что мы вспомнили, обработали и приспособили к решению. Желая перейти от первоначального понимания данной задачи к более точному, более полному ее пониманию, мы подходим к ней с разных точек зрения, рассматриваем ее с разных сторон. Едва ли мы могли бы продвинуться в решении без такого видоизменения задачи.

5. Цель вырисовывается все более и более отчетливо по мере приближения к ней. А когда мы видим цель яснее, мы считаем, что мы к ней ближе. По мере того как изучение задачи продвигается, мы все яснее и яснее можем предвидеть, что следует предпринять для решения задачи и каким образом надо действовать. Если удача нам сопутствует, то при решении математической задачи мы сможем предусмотреть возможность использования известной нам теоремы, полезность рассмотрения ранее решенной задачи, необходимость дополнительного уточнения значения того или иного математического термина. Такие предвидения не являются безошибочными, они лишь до известной степени правдоподобны. Полное подтверждение правильности своего предвидения мы получаем с окончательным решением, а до этого мы часто вынуждены довольствоваться более или менее правдоподобной догадкой. Нам никогда не удалось бы прийти к точному и окончательному решению, не прибегнув к соображениям лишь правдоподобного и предварительного характера. Нам необходимо эвристическое рассуждение.

6. В чем заключается продвижение к решению? В мобилизации и организации знаний, ведущих нас к решению, в эволюции нашего понимания задачи, во все возрастающем предвидении тех шагов, которые приведут к окончательному обоснованию решения. Мы можем продвигаться вперед постоянно, но незаметно, потом вдруг продвинуться резко семимильными шагами. Стремительное продвижение в решении называется счастливой идеей (bright idea), хорошей, удачной, внезапно осенившей вас мыслью (в немецком языке есть более специальный термин *Einfall*). Что такое счастливая идея? Резкое и очень существенное изменение в нашей точке зрения на задачу, стремительная перестройка характера нашего понимания задачи, только что возникшее уверенное предвидение шагов, необходимых для решения задачи.

7. Вышеизложенные соображения служат хорошим фоном для вопросов и советов нашей таблицы.

Многие из этих вопросов и советов направлены непосредственно на *мобилизацию* наших, ранее приобретенных знаний: *Не встречалась ли вам эта задача ранее? Или подобная задача, но в несколько другой форме? Не знаете ли вы какой-нибудь похожей задачи? Не знаете ли вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной? Рассмотрите неизвестное!*

И постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или сходным неизвестным.

Бывает такое характерное состояние, при котором нам кажется, что нами собраны нужные сведения и что наши усилия направлены на лучшую *организацию* того, что мы мобилизовали: *вот задача, которая похожа на вашу и уже решена. Сумеете ли вы воспользоваться ею? Сумеете ли вы применить ее результат? Сумеете ли использовать ее метод? Сумеете ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы можно было воспользоваться этой задачей?*

Есть другие типические ситуации, при которых мы думаем, что собранные нами сведения недостаточны. Мы задумываемся — чего же нехватает? *Все ли данные мы использовали? Все ли условие? Приняли ли мы во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?*

Некоторые вопросы непосредственно направлены на *видоизменение* задачи: *сможете ли вы изложить задачу иначе? А еще иначе?* Многие вопросы имеют своей целью варьировать задачу специальными приемами, например возвращением к определениям или пользуясь аналогией, обобщением, специализацией, разложением и обобщением.

Иные же вопросы предлагают проверку, чтобы *предвидеть* характер решения, которое мы хотим получить: *возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?*

В вопросах и советах нашей таблицы нет непосредственных упоминаний о *счастливой идее*, но по существу они все связаны с ней.

Вникая в суть задачи, мы создаем благоприятные условия для возникновения счастливой идеи, составляя план, мы стараемся вызвать ее. Вызвав счастливую идею, осуществляем ее в решении, а потом при изучении хода и результата решения мы стараемся максимально использовать ее[1].

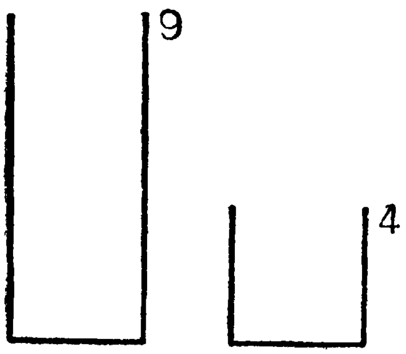
Противоречивость (см. «Условие»)[2].

---

[1] Некоторые вопросы, затронутые в этой статье, более подробно рассмотрены в статье автора в Acta Psychologica, vol. 4, 1938, pp. 113—170. (Примечание автора.— *Ред.*)

[2] Статья содержит исключительно ссылки на другие статьи «Словаря».

Работать от конца к началу. Если мы хотим понять поведение человека, нужно сравнить его с поведением животного. Животные тоже «имеют проблемы» и «решают задачи». За последние десятилетия экспериментальная психология существенно продвинулась в области исследования деятельности различных животных при «решении задач». У нас нет возможности рассматривать эти исследования, но мы опишем один простой и поучительный опыт, и наше описание послужит своего рода пояснением к методу анализа или, как мы его называем, методу «работать от конца к началу». Этот метод, кстати сказать, рассматривается в другом месте данной книги в статье, посвященной П а п п у — человеку, которому мы обязаны описанием этого метода.



Фиг. 18.

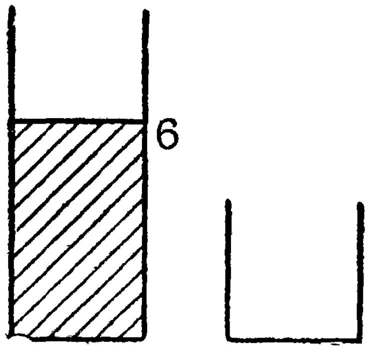
1. Попытаемся найти ответ на следующий замысловатый вопрос: *каким образом можно принести из реки ровно шесть литров воды, если для измерения ее имеется только два ведра — одно емкостью в 4 л, другое в 9 л?* Представим себе те орудия, с которыми нам придется работать: два ведра. (*Что дано?*) В воображении мы представляем себе два цилиндрических сосуда с равными основаниями, высоты которых относятся как 9 : 4 (см. фиг. 18).

Если бы на боковых поверхностях сосудов были равномерные шкалы из горизонтально нанесенных линий, по которым мы могли бы определить высоту уровня воды, то наша задача оказалась бы легкой. Однако такой шкалы нет, и поэтому мы еще очень далеки от решения.

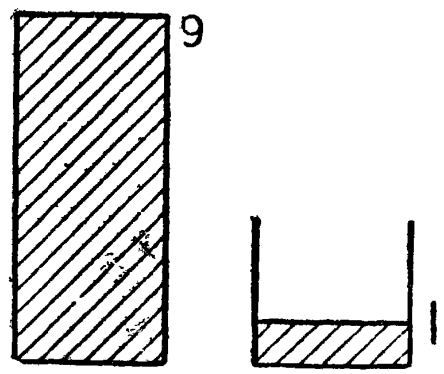
Нам еще неизвестно, как точно отмерить 6 *л*. А могли бы мы получить какой-нибудь другой объем? (*Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Сможете ли вы вывести, что-нибудь полезное из имеющихся данных?*) Давайте же повозимся немного и все-таки предпримем что-нибудь. Мы могли бы наполнить большой сосуд, а затем из него налить меньший сосуд. Так мы сумеем получить 5 *л*. Сможем ли мы получить 6 *л*? Начнем сначала. У нас два сосуда, мы можем...

Теперь мы действуем так, как обычно делают большинство людей, которые пытаются решить эту головоломку. Мы начинаем с двух пустых сосудов, пробуем так и этак, опорожняем и наполняем, а потерпев неудачу, начинаем снова, пробуя другой вариант. Мы *работаем от начала к концу*, от данного исходного положения к желанной конечной цели, от данных к неизвестному. После многократных попыток мы можем случайно найти решение.

2. Но очень способные люди или те, которые имели возможность на уроках математики изучить нечто большее, чем лишь избитые математические приемы, не станут тратить слишком много времени на такие попытки, а «переворачивают задачу» и начинают работать от конца к началу.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Что от нас требуется? (*Что неизвестно?*) Представим себе возможно яснее окончательное положение, к которому мы стремимся.

Представим себе, что перед нами большой сосуд с шестью литрами воды, а меньший сосуд пустой, как это изображено на фигуре 19. (Будем *исходить из того, что требуется сделать*, и *считать, что искомое уже найдено*, говорит П а п п.)

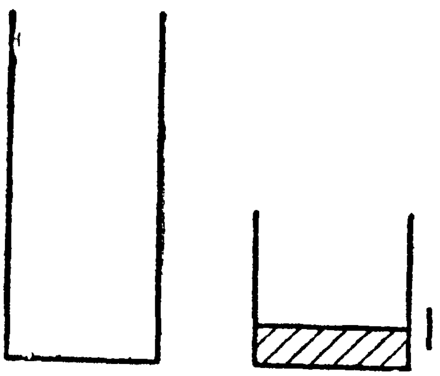
Из какого предшествующего результата могли бы мы получить желаемый окончательный результат, показанный на фигуре 19? (Выясним, из *какого предшествующего вывода мог бы быть получен желаемый вывод*, говорит П а п п.)

Мы могли бы, конечно, полностью наполнить большой сосуд, т. е. налить в него 9 *л*. Но в этом случае надо суметь отлить точно 3 *л*. Чтобы сделать это, в меньшем сосуде у нас должен быть только 1 *л*! В этом вся идея (см. фиг. 20). (Этот шаг вовсе не простой и лишь немногие смогут сделать его сразу. В самом деле, правильно оценив значение этого шага, мы по сути дела в общих чертах уже имеем решение, описываемое ниже.)

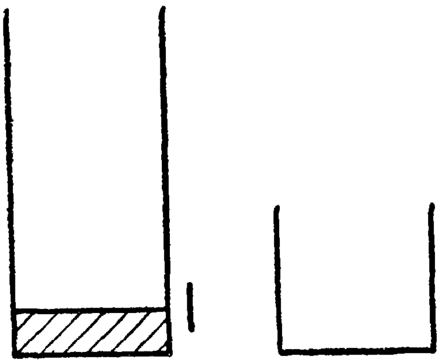
Но каким образом можно прийти к положению, указанному на фигуре 20? (Выясним еще раз, *как из данного поло-*

жения получить положение, которое предшествовало ему.) Поскольку количество воды в реке для нас практически неограниченно, то положение на фигуре 20 по существу может быть сведено к тому, которое изображено на фигуре 21 или на фигуре 22.

Легко заметить, что если получить какое-либо одно из положений, изображенных на фигурах 20, 21, 22, то и любое

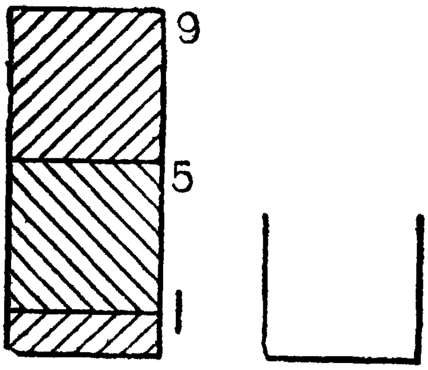


Фиг. 21.



Фиг. 22.

другое из них тоже можно получить. Но не так уж легко получить такое положение, как на фигуре 22, если *оно не встречалось нам раньше*, если мы не сталкивались с ним случайно в наших предварительных попытках. Когда мы возились с этими двумя сосудами, у нас, возможно, получалось нечто похожее, и теперь кстати будет вспомнить, что положение на фигуре 22 может возникнуть, например, так, как подсказывает фигура 23.



Фиг. 23.

Мы полностью наполняем большой сосуд и отливаем 4 *л* в меньший сосуд, а из него выливаем воду в реку. Это мы проделываем дважды. Таким образом, мы *в конце концов получили нечто известное* (по словам Паппа), и, следуя путем анализа, *работая от конца к началу*, мы нашли правильную последовательность действий.

Правда, мы открыли правильную последовательность в обратном порядке, но остается лишь *обратить порядок этого процесса и начинать с того пункта, к которому мы пришли в конце анализа* (как говорит Папп). Сначала мы выполняем те действия, которые подсказываются фигурой 23, и приходим к фигуре 22, затем мы переходим к фигуре 21, затем к 20 и, наконец, к фигуре 19. *Возвращаясь по пройденному пути, мы в конце концов добиваемся того, что от нас требовалось.*

3. Открытие метода анализа греки приписывают Платону. Возможно, это и не совсем достоверно, но во всяком случае, если этот метод не был изобретен Платоном, то какой-то греческий ученый счел нужным приписать это изобретение гению философа.

В этом методе есть нечто незаурядное, есть и известная психологическая трудность: приходится стать спиной к цели, уходить от желаемого, а не идти к нему прямой дорогой, приходится работать от конца к началу. После того как мы раскрыли правильную последовательность действий, наши мысли должны следовать в порядке, противоположном действительному решению.

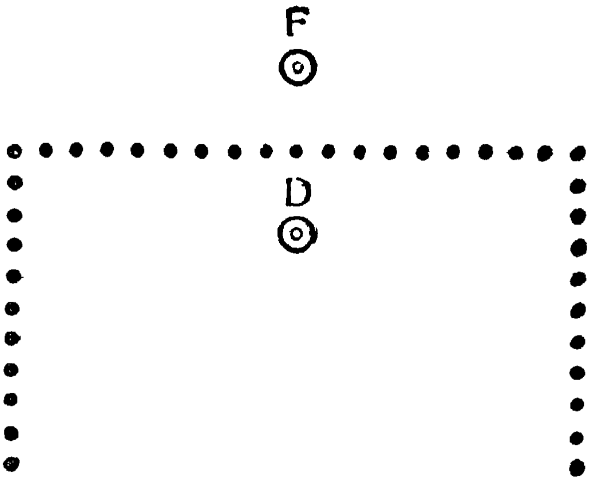
К такому обратному порядку появляется отрицательная психологическая реакция, которая может помешать даже способному учащемуся понять этот метод, если он неумело преподносится.

Однако, чтобы решить конкретную задачу, работая от конца к началу, не требуется быть гением; всякий, обладающий здравым смыслом человек может сделать это. Мы сосредоточиваем все свое внимание на желаемом результате, мы умозрительно представляем себе то положение, к которому мы хотели бы прийти. Из какого предшествующего положения можно прийти к желаемому положению? Постановка такого вопроса вполне естественна, а поставить его и значит работать от конца к началу. Решение совсем легких задач, естественно, может привести к тому, что мы будем решать от конца к началу (см. Папп, 4).

Работа от конца к началу есть процесс, подсказанный здравым смыслом и доступный каждому. Вряд ли можно сомневаться в том, что им пользовались и математики и нематематики до Платона. Формулировка этого процесса в обобщенной форме и характеристика его как процесса, полезного для решения математических и нематематических проблем, возможно, были достойны именно гения Платона.

4. А теперь обратимся к психологическому эксперименту, если только переход от Платона к собакам, курам и шимпанзе не покажется читателям слишком резким.

Как показано на фигуре 24, забор образует три стороны прямоугольника, четвертая сторона остается открытой. С одной стороны забора, в точке D, мы пускаем собаку. По другую сторону, в точке F, кладем пищу. Добраться до пищи для собаки довольно легкая задача. Она сначала присядет, как будто хочет прыгнуть непосредственно к ней, но затем быстро поворачивается, бежит, огибает забор и бросается прямо к пищи. Однако иногда решение не так просто дается, в особенности, если точки F и D близки друг к другу. Собака может потерять некоторое время, будет лаять, царапаться или безуспешно прыгать на забор раньше, чем ее осенит «счастливая идея» (как мы бы сказали), и она побежит вокруг забора.



Фиг. 24.

Интересно сравнить поведение различных животных, поставленных на место собаки. Задача очень проста для шимпанзе или четырехлетнего ребенка (для которого игрушка может быть даже лучшей приманкой, чем пища). Задача, однако, оказывается удивительно трудной для курицы, которая будет суетливо бегать взад и вперед на своей стороне забора и может потерять много времени прежде, чем доберется до корма, если она вообще доберется до него. Впрочем после долгой беготни ей это может удаться случайно.

5. На основании лишь одного простого эксперимента, который мы весьма схематично изложили, не следует создавать никаких серьезных теорий. Будет, однако, полезно подметить очевидные аналогии, если мы готовы проверить их вторично и еще раз обдумать сделанные выводы.

При решении проблемы любого рода мы стараемся обойти препятствия. Наш эксперимент имеет как бы символическое значение. Курица в своих действиях похожа на тех людей, которые предпринимают многократные попытки, ошибаются и путаются и в конце концов по счастливой случайности успешно доводят решение до конца. Они сами не могут как следует объяснить причины своего успеха. Собака, которая царапалась, лаяла и прыгала, перед тем как обежать забор, решила свою задачу примерно с таким же успехом, с каким мы решили свою задачу с двумя сосудами. То, что мы вообразили шкалу, показывающую уровень в сосудах, похоже на почти бесполезное царапанье. Полезным, пожалуй, было только то, что мы поняли, что вовсе не так легко найти искомое, что оно скрыто гораздо глубже. Мы тоже пытались решить задачу непосредственно, решать от начала к концу и лишь позже пришли к необходимости изменить направление. Только после этого мы стали решать задачу от конца к началу. Хотя на самом деле это может быть вовсе и не так, но создается впечатление, что собака, которая после краткого «рассмотрения обстановки» обежала забор и помчалась к пище, обладает большей проницательностью, чем мы.

Нет, даже курицу не следует винить за несообразительность. Ведь определенно трудно бывает, когда надо отвернуться от цели, уходить от нее, продолжать действовать, не видя постоянно цели впереди, сворачивать с прямого пути. Между затруднениями курицы и нашими имеется явная аналогия.

Разделите условие на части. Наша первая обязанность— понять стоящую перед нами задачу. Поняв задачу в целом, мы вникаем затем в детали. Мы изучаем главные части задачи — неизвестное, данные, условие, каждую часть в отдельности. Когда эти части хорошо запечатлелись у нас в памяти, но в голову еще не пришла полезная идея, мы начинаем вникать в дальнейшие подробности, рассматриваем различные данные, причем мы рассматриваем каждое данное в отдельности. Поняв условие в целом, *разделяем условие на части* и рассматриваем каждую в отдельности.

Теперь нам ясно значение предложенного совета. Он должен толкнуть нас на шаг, который следует предпринять, чтобы четко уяснить себе задачу и, если необходимо, вникнуть во все более и более тонкие детали ее. Этот шаг ведет к разложению и составлению новых комбинаций.

Разделите условие на части. Постарайтесь записать их. Этот совет нам часто представляется возможным предложить при составлении уравнений.

Разложение и составление новых комбинаций представляют собой важные мыслительные процессы.

Вы рассматриваете некоторый объект, интересующий вас или возбуждающий ваше любопытство: дом, который вы намерены взять внаем, важную, но загадочную телеграмму, любой предмет, назначение и происхождение которого вы не можете объяснить, любую задачу, которую вы хотите решить. Вы имеете некоторое представление об этом объекте как о целом, но, возможно, ваше представление лишено ясности и определенности. Вас поражает какая-либо частная деталь, вы сосредоточиваете на ней свое внимание. Затем вы переносите свое внимание на другую деталь, затем на третью и т. д.

Вам в голову может прийти сопоставить несколько деталей, рассматривая их в различных комбинациях; через некоторое время вы снова возвращаетесь ко всему объекту как к целому, но воспринимаете его уже по-иному. Вы разлагаете целое на части, а затем снова объединяете части в целое, которое вам теперь представляется уже в ином свете.

1. Начав вдаваться в детали, вы можете в них запутаться. Обилие частностей или чрезмерная детальность их рассмотрения отягощают мышление. Они могут помешать вам обратить достаточное внимание на главное или вообще увидеть это главное. Подумайте о человеке, который из-за деревьев не увидел леса.

Конечно, нам не хочется тратить время на ненужные детали; мы должны направить наши усилия на выяснение существа дела. Трудность здесь в том, что мы не знаем заранее, какие именно детали в конце концов окажутся необходимыми.

Поэтому прежде всего попытаемся воспринять задачу в целом. Поняв постановку задачи, мы в большей степени сможем судить о том, какие частности окажутся наиболее существенными.

Исследовав их, мы в состоянии судить и о том, какие дальнейшие детали заслуживают подробного рассмотрения.

Мы должны входить в детали и разлагать задачу постепенно, но лишь до такой степени, какая действительно необходима.

Конечно, учитель не может ожидать, что с этой точки зрения все учащиеся будут действовать разумно. Напротив, некоторые из них имеют глупое и вредное обыкновение начинать заниматься деталями, не поняв всю задачу в целом.

2. Мы рассмотрим сейчас математические задачи «на нахождение».

Уяснив себе задачу в целом, то главное, что в ней содержится, и цель, которую она ставит перед нами, мы намерены перейти к деталям. С чего нам начать?

Почти во всех случаях разумно начинать с рассмотрения главных элементов задачи, т. е. неизвестного, данных и условия. Почти всегда рекомендуется начинать детальное рассмотрение задачи с вопросов: *Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?*

Как мы должны поступить, желая исследовать дальнейшие детали? Очень часто оказывается полезным исследовать каждую в отдельности, *разделить условие на части* и рассмотреть отдельно каждую часть.

Может оказаться необходимым, особенно, если задача трудна, осуществить ее дальнейшее разложение и рассмотреть возникающие при этом новые детали. Но иногда приходится *возвращаться к определению* некоторого понятия, вводить новые элементы, фигурирующие в этом определении, и заниматься исследованием этих вновь введенных элементов.

3. Разложив задачу, мы стараемся вновь объединить ее элементы, но уже каким-то новым образом. В частности, можно попытаться составить из элементов задачи новую, более легкую задачу, которую, возможно, нам удастся использовать в качестве вспомогательной.

Конечно, объединить вновь части, на которые разложена задача, можно, составляя из них самые различные комбинации.

Трудная задача требует исключительных, оригинальных комбинаций, найти которые нелегко. В оригинальности комбинации проявляется изобретательность решающего задачу. Однако существуют некоторые обычные и сравнительно простые виды комбинаций, которые оказываются достаточными в случае более или менее простых задач и которые должны быть нам знакомы. К ним-то и нужно прибегнуть прежде всего, даже если в конце концов придется применить и не столь очевидные средства.

Ниже приводится формальная классификация, охватывающая наиболее обычные и часто применяемые комбинации. Чтобы преобразовать данную задачу в некоторую новую, можно:

1) сохранить неизвестное, изменив остальное (данные и условие);

2) сохранить данные, изменив остальное (неизвестное и условие), или, наконец,

3) изменить и неизвестное и данные.

Ниже мы рассмотрим эти случаи.

[Случаи 1) и 2) частично совпадают. Действительно, можно оставить прежними и неизвестное и данные и преобразовать задачу, изменив лишь условие. Например, следующие две задачи, хотя и явно эквивалентны, но не тождественны:

Построить равносторонний треугольник по данной его стороне.

Построить равноугольный треугольник по данной его стороне.

Разница в формулировках двух задач, незначительная в этом примере, может оказаться существенной в других случаях. Рассмотреть случаи подобного рода, несмотря на их важность, здесь мы не имеем возможности. (Ср. «Вспомогательная задача», п. 7, последнее замечание.)]

4. *Сохранение неизвестного* при изменении данных и условия часто дает полезное преобразование исходной задачи. Совет «рассмотрите неизвестное» рекомендует сопоставить задачи с одним и тем же неизвестным. Мы можем попытаться воскресить в памяти задачу подобного рода, решенную прежде.

Постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Если нам не удалось вспомнить такую задачу, мы можем попытаться ее придумать: *нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное?*

Чем теснее связана новая родственная задача с исходной, тем вероятнее, что она окажется полезной. Поэтому, сохраняя неизвестное, мы пытаемся сохранить также некоторые данные и некоторую часть условия, изменяя как можно меньше лишь одно или два данных и небольшую часть условия. Лучший метод состоит в том, что мы что-то опускаем, ничего не прибавляя. Мы сохраняем неизвестное, *оставляем лишь часть условия, отбрасывая оставшуюся часть*, не вводя в условие ничего нового и не добавляя данных. Примеры и замечания к этому случаю даны ниже, в пунктах 7, 8.

5. *Сохранив данные*, мы можем попытаться ввести новое неизвестное, найти которое оказалось бы легче, чем разыскать первоначальное неизвестное. Это неизвестное должно определяться первоначальными данными; именно такое новое неизвестное мы и имеем в виду, задавая вопрос: *нельзя ли извлечь что-либо полезное из данных?*

Заметим, что здесь желательны две вещи. Во-первых, новое неизвестное должно быть *доступнее*, т. е. найти его из данных должно быть легче, чем первоначальное неизвестное. Во-вторых, новое неизвестное должно оказаться *полезным*, т. е., будучи найдено, оно должно принести определенную пользу для разыскания первоначального неизвестного. Короче говоря, новое неизвестное должно быть подобно камню, лежащему посредине ручья. Этот камень ближе ко мне, чем другой берег, на который я хочу перебраться. Поэтому, ступив сначала на камень, я оказываюсь ближе к своей окончательной цели.

Новое неизвестное должно оказаться и доступным и полезным; однако на практике нам часто приходится довольствоваться меньшим. Если нет ничего лучшего, из данных стоит извлечь хоть что-нибудь, что имеет шансы оказаться полезным.

Разумно также попытаться извлечь пользу из введения нового неизвестного, тесно связанного с первоначальным, хотя бы, на первый взгляд, и не кажущегося доступнее.

Так, например, решая задачу о диагонали прямоугольного параллелепипеда (п. 8), мы можем в качестве нового неизвестного ввести диагональ грани. Мы поступаем так, либо *зная*, что с помощью диагонали грани мы можем найти диагональ параллелепипеда (как в п. 10), либо видя, что диагональ грани найти легко, и *подозревая*, что она окажется полезной при решении исходной задачи. (Ср. «Все ли данные вами использованы?», п. 1.)

Если задача состоит в построении окружности, нам нужно найти две вещи — ее центр и ее радиус; можно сказать, что задача состоит из двух частей. В некоторых случаях одна часть оказывается доступнее другой; поэтому, во всяком случае, эту возможность целесообразно рассмотреть: *нельзя ли решить часть задачи?*

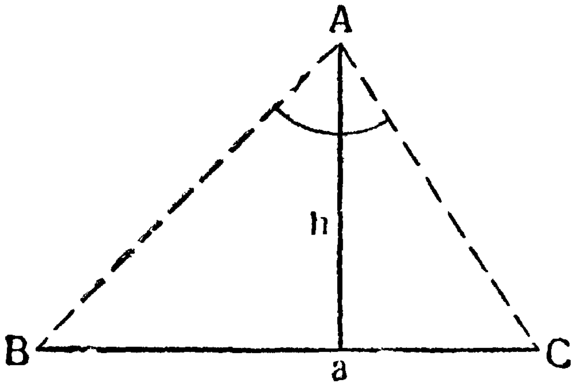
Задавая себе этот вопрос, мы взвешиваем шансы: стоит ли сосредоточить все внимание именно на центре окружности или именно на радиусе, выбрав либо первое, либо второе в качестве нового неизвестного? Вопросы подобного рода часто приносят пользу. В сложных или трудных задачах идея, приводящая к решению, часто состоит в выделении из задачи более доступной, но существенной части.

6. *Изменяя и неизвестное и данные*, мы в большей степени отходим в сторону от первоначальных намерений, чем в предыдущих случаях. Естественно, это не очень-то нам нравится; мы ощущаем опасность совсем потерять из виду первоначальную задачу. Однако мы вынуждены идти на столь

значительные изменения, если менее радикальные не дали ничего доступного и полезного. Иногда новая задача, стоящая довольно далеко от исходной, привлекает нас своей доступностью.

Нельзя ли изменить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то и другое, так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе друг к другу?

Интересный способ изменения и неизвестного и данных состоит в перемене ролей неизвестного и одного из данных. (см. «Нельзя ли использовать полученный результат?», п. 3.)



Фиг. 25.

7. *Пример*. Постpcить треугольник по данной стороне a, высоте h, опущенной на эту сторону, и углу α, противолежащему этой стороне.

Что неизвестно? Треугольник.

Что дано? Отрезки a и h и угол α.

Если мы в какой-то степени знакомы с геометрическими задачами на построение, мы, конечно, попытаемся свести задачу к построению некоторой точки. Строим отрезок BC заданной длины a; теперь нам остается лишь найти вершину A искомого треугольника, противолежащую стороне BC (фиг. 25).

Итак, мы пришли к такой новой задаче:

Что неизвестно? Точка A.

Что дано? Отрезок h, угол α и две фиксированные на плоскости точки B и C.

В чем состоит условие? Расстояние точки A от прямой BC должно быть равным h, а угол BAC должен быть равным α. Таким образом, мы преобразовали исходную задачу, изменив как неизвестное, так и данные. В самом деле, новое неизвестное — точка, тогда как старым неизвестным являлся треугольник. Некоторые данные одни и те же в обеих задачах — отрезок h и угол α, однако теперь мы имеем дело с данными точками B и C, тогда как в исходной задаче была задана длина a.

Новая задача достаточно проста. Подвести нас к идее ее решения может следующее рассуждение.

Разделите условие на части. Условие состоит из двух частей, в одной из которых существенную роль играет данное h, а в другой — α. Требуется, чтобы искомая точка:

(I) находилась на расстоянии h от прямой BC;

(II) являлась вершиной угла, равного α, стороны которого проходили бы через данные точки B и C.

Если мы *сохраним только часть условия*, *отбросив остальную часть*, положение искомой точки не будет полностью определено. Существует бесконечно много точек, удовлетворяющих части (I) условия, а именно: все точки прямой, параллельной BC, расстояние которой до BC равно h[1]. Эта прямая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих части (I) условия.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих части (II), есть дуга некоторой окружности; концами этой дуги являются точки B и C. Мы в состоянии построить оба геометрических места; их пересечение даст нам искомую точку.

Примененный здесь метод представляет известный интерес. Решая геометрические задачи на построение, мы часто с успехом можем следовать этому образцу, т. е. сводить данную задачу к задаче на построение некоторой точки, а затем находить искомую точку как пересечение двух геометрических мест.

Более того, один из важных этапов приведенного выше рассуждения — *сохранение части условия и отбрасывание остальной части* — представляет интерес и с более общей точки зрения. Мы можем следовать этому образцу, решая всевозможные «задачи на нахождение». При этом мы ослабляем условие задачи, снимая часть ограничений, наложенных на неизвестное.

Насколько определенным останется тогда неизвестное; как сможет оно меняться? Задавая этот вопрос, мы фактически ставим новую задачу.

Если неизвестным служит точка на плоскости (как в рассмотренном нами примере), решение этой новой задачи состоит в определении геометрического места возможных положений этой точки. Если неизвестным служит математический объект какой-либо иной природы (например, квадрат в п. 18), нам приходится должным образом вводить понятие множества объектов и точно определять то множество объектов, которое является искомым. Даже в случае,

---

[1] Плоскость разбивается прямой BC на две полуплоскости. Мы выбираем одну из них и предполагаем, что именно в ней лежит искомая точка A. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением одной прямой, параллельной BC. В противном случае, нам пришлось бы рассматривать две прямые, параллельные BC. (Примечание автора.)

когда неизвестное не есть математический объект (как в следующем примере, п. 8), может оказаться полезным рассмотреть, описать или перечислить объекты, удовлетворяющие некоторой части условия, наложенного на неизвестное в первоначальной задаче.

8. *Пример.* Решая кроссворд, в котором допускаются игра слов и анаграммы, мы встречаем следующий ключ:

«В обоих направлениях вращающаяся деталь машины (5 букв)».

Что неизвестно? Слово.

В чем состоит условие? Слово должно состоять из 5 букв. Оно должно обозначать какую-то вращающуюся деталь какой-то машины. Оно должно быть русским словом, причем будем надеяться, не чересчур редким.

Достаточно ли условие для определения неизвестного? Нет.

Слишком много слов удовлетворяют условию, таких, как «рычаг», «ролик», «гайка» и т. д. Условие выражено двусмысленно; это, конечно, сделано намеренно. После ряда безуспешных попыток найти слово, обозначающее деталь машины, для которой характерным признаком было бы вращение в обоих направлениях, мы начинаем подозревать, что имеется в виду *чтение* в обоих направлениях. Такое толкование ключа может оказаться прекрасной догадкой.

Разделите условие на части. Условие задачи состоит из двух частей, в одной из которой существенную роль играет значение слова, а в другой — комбинация букв, составляющих это слово.

Требуется, чтобы искомое слово:

(I) обозначало вращающуюся деталь некоторой машины,

(II) состояло из 5 букв, причем при чтении в обратном направлении эти буквы должны давать снова слово, обозначающее вращающуюся деталь машины.

Если *оставить часть условия, отбросив остальную часть*, неизвестное окажется не вполне определенным. Существует много слов, удовлетворяющих части (I) условия; они образуют нечто вроде «геометрического места». Мы можем «построить» «геометрическое место» (I) и затем, «следуя» вдоль него, дойти до пересечения с «геометрическим местом» (II). Естественно сосредоточить свое внимание на части (I) условия, найти несколько слов с данным значением, а затем исследовать каждое из них в отношении количества букв и возможности читать его в обоих направлениях.

Возможно, нам придется вспомнить несколько слов, прежде чем мы наткнемся на искомое: рычаг, муфта, гайка, ролик, ротор, ... Ну, конечно, «ротор»!

9. В пункте 3 мы дали классификацию тех возможностей, которые возникают при объединении вновь элементов, на которые была разложена исходная задача «на нахождение». Если мы намерены составить из этих элементов не одну новую задачу, а две или более, перед нами открываются большие возможности, о которых мы, однако, лишь упоминаем, оставляя в стороне их классификацию.

Мы можем встретиться и с возможностями другого рода. В частности, может оказаться, что решение некоторой «задачи на нахождение» связано с решением некоторой «задачи на доказательство». Мы лишь упоминаем о возможности такого важного случая, воздерживаясь за недостатком места от подробного его изучения.

10. Лишь несколько коротких замечаний можно сделать относительно «задач на доказательство»; при этом будет очевидна полная аналогия тому, о чем мы подробно говорили, рассматривая «задачи на нахождение» (п. 2—9).

Уяснив себе как целое некоторую «задачу на доказательство», нам, вообще говоря, следует рассмотреть ее главные элементы. Главными элементами теоремы, которую нам предстоит доказать или опровергнуть, являются ее предпосылка[1] и заключение. Мы должны как следует понять эти элементы.

Какова предпосылка теоремы? В чем состоит ее заключение? Если возникает необходимость рассмотреть какие-либо частные детали, можно *разделить предпосылку теоремы на ее части* и рассмотреть каждую часть в отдельности. Затем можно перейти к другим деталям, осуществляя все большее разложение задачи.

Разложив задачу, мы можем попытаться вновь объединить составляющие ее элементы некоторым новым образом.

---

[1] Здесь мы пользуемся термином, принятым С. А. Богомоловым в его книге «Геометрия» (систематический курс), Учпедгиз, 1949. Вместо термина «предпосылка» в нашей литературе, впрочем, чаще применяется термин «условие». Последний в нашем контексте оказывается неудобным, так как это слово постоянно используется в настоящей книге для обозначения отношений, связывающих между собой данные и искомые элементы в «задачах на нахождение». В оригинале в этих двух случаях применяются, соответственно, термины hypothesis и condition. (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

В частности, можно попытаться составить из них новую теорему. Здесь существуют три возможности.

1) Мы *сохраняем заключение теоремы*, изменяя ее предпосылку. Прежде всего мы попытаемся припомнить такого рода теорему:

Рассмотрите заключение! И попытайтесь вспомнить знакомую теорему с тем же или подобным заключением. Если нам не удается вспомнить такую теорему, мы пытаемся ее придумать: *нельзя ли придумать другую предпосылку, из которой можно было бы легко вывести заключение?* Можно изменить предпосылку, что-либо в ней опуская, но ничего не прибавляя. *Сохраните лишь часть предпосылки, отбросив остальную часть; останется ли при этом заключение справедливым?*

2) Мы *сохраняем предпосылку*, меняя заключение. *Нельзя ли извлечь что-либо полезное из предпосылки?*

3) Мы *изменяем и предпосылку и заключение теоремы.* Возможно, что мы пришли к необходимости изменить то и другое вследствие безуспешных попыток изменить что-либо одно. *Нельзя ли изменить предпосылку теоремы или ее заключение, или, если необходимо, то и другое, так, чтобы новая предпосылка и новое заключение оказались ближе друг к другу?*

Мы не делаем здесь попыток классифицировать различные возможности, возникающие в случае, когда мы, пытаясь решить исходную «задачу на доказательство», вводим две (или более) новые задачи этого рода или когда мы связываем рассматриваемую «задачу на доказательство» с некоторой «задачей на нахождение».

Рассмотрите неизвестное. Это старый совет; подобное латинское выражение гласит: «respice finem», т. е. «смотри на конец». Помните о своей цели. Не забывайте о ней. Думайте о том, чего вы добиваетесь, не выпускайте из поля зрения то, что требуется от вас в задаче. Всегда имейте в виду цель, к которой вы стремитесь. *Рассмотрите неизвестное. Рассмотрите заключение.* Эти последние два варианта латинского «respice finem» сформулированы применительно именно к математическим задачам, соответственно к «задачам на нахождение» и к «задачам на доказательство».

Сосредоточивая все свое внимание на цели и напрягая свою волю для достижения успеха, мы обдумываем пути и средства, при помощи которых мы можем добиться его. Какими средствами мы можем прийти к успешному концу? Как можно добиться поставленной цели? Каким образом можно получить такой результат? Какие причины могут привести к такому результату? Где вам встречался подобный результат? Что обычно предпринимается для получения такого результата? *И постарайтесь припомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. И постарайтесь припомнить знакомую теорему с такими же или подобными заключениями.* Опять-таки эти последние два совета соответственно относятся именно к «задачам на нахождение» и к «задачам на доказательство».

1. Мы будем рассматривать математические задачи, «задачи на нахождение», и совет: *постарайтесь припомнить знакомую задачу с таким же неизвестным.* Сравним этот совет с аналогичным советом, содержащимся в вопросе: *не знаете ли вы какой-нибудь сходной задачи?*

Последний совет носит более общий характер, чем первый. Если две задачи родственные, то они имеют что-то общее; они могут содержать ряд общих элементов или понятий или иметь общими какие-нибудь данные или часть условия и т. д. Наш первый совет исходит из того, что у обеих задач именно неизвестное является общим, т. е. неизвестное в обоих случаях должно быть объектом одной категории, например длиной отрезка прямой линии.

По сравнению с советом общего характера, более конкретный совет отличается большей определенностью, он рациональнее.

Во-первых, мы можем экономить наши усилия в изложении задачи; не приходится рассматривать всю задачу сразу, а лишь неизвестное. Задача схематически предстанет перед нами в виде:

«Дано... найти длину отрезка».

Во-вторых, имеется известная экономия в выборе. Многие-многие задачи могут быть приведены в связь с данной задачей, имея какие-нибудь точки соприкосновения с ней. Но рассматривая неизвестное, мы ограничиваем свой выбор, мы рассматриваем только те задачи, которые имеют то же неизвестное. И, конечно, из всех задач с тем же неизвестным мы рассматриваем прежде всего наиболее элементарные и наиболее знакомые нам.

2. Задача, стоящая перед нами, записана в виде:

«Дано ... найти длину отрезка».

Наиболее простые и наиболее знакомые задачи подобного рода связаны с треугольниками. Даны три элемента треугольника, найти длину одной из сторон. Вспомнив это, мы нашли задачу, которая может помочь нам: *вот задача, родственная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат?* Для того чтобы мы могли воспользоваться известными теоремами о треугольниках, в нашей фигуре должен быть треугольник. Имеется у нас треугольник? Или нам следует ввести треугольник, чтобы воспользоваться этими теоремами? *Не следует ли ввести какой-то вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться этой задачей?*

Имеется несколько простых задач, в которых неизвестна сторона треугольника. (Эти задачи различаются своими данными — могут быть даны два угла и одна сторона или две стороны и один угол, причем положение угла относительно данных сторон может быть различно. Следует отметить, что все эти задачи особенно просты для прямоугольных треугольников.) Рассматривая стоящую перед нами задачу, мы стараемся выяснить, какой треугольник нам следует ввести в нее, какую ранее решенную задачу (с тем же неизвестным, что в нашей задаче) нам выгоднее всего применить в данном случае.

После того как мы ввели подходящий вспомогательный треугольник, может оказаться, что нам еще неизвестны три его элемента. Это не существенно, если мы предвидим, что неизвестные элементы можно будет каким-нибудь образом определить. Тем самым мы значительно продвинулись в решении задачи, у нас есть план решения.

3. Суть подхода, схематично изложенного выше (в пп. 1 и 2), иллюстрируется в основном в пункте **10** (иллюстрация несколько нечеткая из-за медлительности учащихся). Совсем нетрудно увеличить число подобных примеров. В самом деле, к решению почти всех «задач на нахождение», обычно предлагаемых на ранней стадии обучения, можно приступить, если правильно следовать совету: *и постарайтесь припомнить, знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.*

К таким задачам нужно подходить по определенной схеме и прежде всего рассмотреть неизвестное:

1) дано ... найти длину отрезка;
2) дано ... найти угол;
3) дано ... найти объем тетраэдра;
4) дано ... построить точку.

При наличии некоторого опыта в решении элементарных математических задач мы легко вспомним одну или несколько простых и знакомых задач с тем же неизвестным. Если данная задача сама не принадлежит к числу простых и знакомых задач, мы, естественно, стараемся воспользоваться известными нам решениями таких задач. Мы пытаемся ввести какой-нибудь полезный, хорошо знакомый нам элемент в задачу, и, поступая так, мы приобретаем хороший отправной пункт для дальнейшего исследования задачи.

В каждом из этих четырех вышеупомянутых случаев план решения очевиден, ибо имеется обоснованная догадка о том, каким путем вести решение.

(1) Неизвестное следует определить как сторону некоторого треугольника. Остается ввести подходящий треугольник с тремя известными или легко определяемыми элементами.

(2) Неизвестное следует определить как угол некоторого треугольника. Остается ввести подходящий треугольник.

(3) Неизвестное может быть определено, если площадь основания и высота известны. Остается определить площадь какой-нибудь грани и соответствующую этой грани высоту.

(4) Неизвестное может быть определено пересечением двух геометрических мест, каждое из которых может быть окружностью или прямой. Остается определить, как можно из условия задачи «выудить» такие геометрические места.

Во всех этих случаях план подсказывается простой задачей с тем же неизвестным и желанием использовать метод ее решения или его результат. Следуя этому плану, мы можем, конечно, столкнуться с трудностями, но все же у нас есть отправная идея, а это уже большой шаг вперед.

4. Но у нас не будет такого преимущества, если у нас нет ранее решенной задачи с тем же неизвестным. В этом случае значительно труднее взяться за решение задачи.

«Определить площадь поверхности шара данного радиуса». Эта задача была решена Архимедом. Едва ли есть более простая задача с тем же неизвестным и, конечно, не было более простой задачи, которой Архимед мог бы воспользоваться. И в самом деле, решение Архимеда можно считать одним из самых выдающихся достижений математики.

«Определить площадь поверхности шара, вписанного в тетраэдр, все ребра которого даны». Зная ответ указанной выше задачи Архимеда, можно решить эту новую задачу, не обладая его гением, остается лишь выразить радиус вписанного шара через ребра тетраэдра. Это не так уж легко, но возникающие трудности не могут сравниться с теми, с которыми столкнулся Архимед.

Единственное отличие легкой задачи от трудной заключается в том, известно ли нам решение какой-нибудь задачи с тем же неизвестным или нет.

5. Когда Архимед приступал к определению площади поверхности шара, он не знал, как мы говорили выше, никакой задачи с тем же неизвестным и решенной ранее. Но ему были известны различные задачи, решенные ранее с подобными неизвестными. Площади некоторых кривых поверхностей определяются легче, чем площадь поверхности шара, и способы их вычисления были известны во времена Архимеда. Такими поверхностями являются, например, боковые поверхности прямых круговых цилиндров, прямых круговых конусов и усеченных конусов. Можно не сомневаться, что Архимед тщательно рассматривал эти более простые случаи. В самом деле, в своем решении он пользуется в качестве приближения к шару составным телом из двух конусов и нескольких усеченных конусов (см. «Определение», п. 6).

Если мы не можем найти ранее решенной задачи с тем же неизвестным, что и в нашей задаче, мы стараемся найти задачу с подобным неизвестным. Последние менее похожи на нашу задачу, чем вышеописанные, и поэтому их труднее использовать в наших целях, но тем не менее в них можно почерпнуть ценные указания.

6. Добавим несколько замечаний о «задачах на доказательство», аналогичные более подробным комментариям к «задачам на нахождение», приведенным выше.

Нам нужно доказать (или опровергнуть) какую-нибудь четко сформулированную теорему. Любая ранее доказанная теорема, чем-нибудь похожая на нашу, может помочь нам. Однако можно ожидать, что более действенную помощь окажут те теоремы, которые содержат такое же заключение, как наше. Учитывая это, мы рассматриваем заключение, т. е. уделяем заключению своей теоремы главное внимание. Наш метод рассмотрения теоремы может быть схематически записан так:

«Если… то углы равны».

Мы сосредоточиваем свое внимание на заключении нашей теоремы и *стараемся припомнить знакомую теорему с тем же или подобным заключением*. Мы особенно стараемся вспомнить какую-нибудь особенно простую, знакомую теорему этого типа.

В рассматриваемом случае имеется несколько различных теорем этого рода, и, возможно, мы вспомним следующую: «Если два треугольника подобны, то их соответственные углы равны». *Вот теорема, похожая на вашу и доказанная ранее. Сумеете ли вы воспользоваться ею? Следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы получить возможность воспользоваться этой теоремой?*

Следуя этим советам и стараясь определить, какую помощь нам может оказать теорема, которую мы вспомнили, мы можем составить такой план: попытаемся доказать равенство интересующих нас углов на основании подобия треугольников. Мы видим, что необходимо ввести два треугольника с этими углами и доказать, что они подобны. Такой план является хорошим началом в работе и, возможно, в конце концов приведет нас к желанной цели, как это показано в пункте **19**.

7. Подведем итог. Вполне вероятно, что, вспомнив ранее решенные задачи с тем же или подобным неизвестным (ранее доказанные теоремы с теми же или подобными заключениями), мы начнем решать задачу в нужном направлении и, возможно, у нас возникнет правильный план решения. В простых случаях, которые встречаются чаще всего на ранней стадии обучения, имеется обычно достаточное число элементарнейших задач с тем же неизвестным (теорем с тем же заключением). Этот прием — попытка припомнить задачи с тем же неизвестным — сам собой напрашивается и основан на здравом смысле (сравните с тем, что было сказано на этот счет в п. 4). Удивительно, что такой простой и полезный прием недостаточно широко известен. Автор склонен думать, что никогда ранее этот прием не излагался во всей его общности. Во всяком случае и учащийся и преподаватель математики не должны пренебрегать советом: *Рассмотрите неизвестное. И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.*

Reductio ad absurdum и косвенное доказательство представляют собой различные, но родственные приемы.

Reductio ad absurdum вскрывает ошибочность какого-нибудь предположения тем, что выводит из него явный абсурд. «Приведение к нелепости» является математическим приемом, но имеет некоторое сходство с иронией, любимым приемом сатирика. Ирония принимает, по-видимому, определенную точку зрения, подчеркивает ее и затем настолько ее утрирует, что в конце концов приводит к явному абсурду.

Косвенное доказательство устанавливает справедливость утверждения тем, что вскрывает ошибочность противоположного ему допущения. Таким образом, косвенное доказательство имеет некоторое сходство с надувательским приемом политикана, поддерживающего своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии.

Как «reductio ad absurdum», так и косвенное доказательство являются эффективными средствами для открытия нового и в пытливом уме возникают как нечто совершенно естественное. Тем не менее они не по вкусу некоторым философам и многим новичкам, что нетрудно понять. Ведь не всем по душе сатирики и политиканы. Сначала мы примерами проиллюстрируем эффективность обоих приемов, а затем рассмотрим возражения против их применения.

1. *Reductio ad absurdum.* Напишите сумму чисел, равную 100, используя для этого десять цифр, причем каждую цифру можно брать только один раз.

Мы можем кое-чему научиться, пытаясь решить эту головоломку, формулировка которой требует некоторого уточнения.

Что неизвестно? Ряд чисел. Под числами мы здесь подразумеваем, конечно, целые положительные числа.

Что дано? Число 100.

В чем состоит условие? Условие состоит из двух частей. Первая часть: составляя ряд искомых чисел, мы должны лишь один раз использовать десять цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Вторая часть: сумма всех чисел должна быть 100.

Сохраните только часть условий, отбросив остальные. Первую часть условия отдельно легко удовлетворить. Возьмите ряд: 19, 28; 37; 46; 50; каждая цифра появляется только один раз. Однако вторая часть условия не удовлетворяется, ибо сумма этих чисел равняется 180, а не 100. Возможно, мы можем удачнее подобрать цифры. «Попытка не пытка» — говорит пословица, и действительно,

$$19+28+30+7+6+5+4=99.$$

Здесь первая часть условия удовлетворяется, а вторая почти удовлетворяется: у нас 99 вместо 100. Конечно, если отбросить первую часть условия, мы легко можем удовлетворить второй:

$$19+28+31+7+6+5+4=100.$$

Теперь первая часть условия не удовлетворяется: цифра 1 встречается дважды, а нуль ни разу; с остальными цифрами все в порядке. «Пытайся, пытайся снова».

После ряда неудачных попыток, мы начнем подозревать, что при требуемых условиях получить 100 невозможно. В конце концов возникает такая задача: *доказать, что невозможно удовлетворить обоим частям предложенного условия одновременно.*

Эта задача непосильна даже для довольно хороших учащихся. Однако при правильном подходе решение довольно простое. Для этого *необходимо рассмотреть тот предположительный случай, при котором обе части условия удовлетворяются.*

Итак, у нас возникло подозрение, что этот случай невозможен и наше сомнение, основанное на опыте наших неудачных попыток, не лишено оснований. Тем не менее, подойдем к делу без предубеждения и рассмотрим случай, при котором гипотетически, предположительно, якобы, обе части условия удовлетворяются. Таким образом, представим себе ряд чисел, сумма которых равна 100. Числа эти должны быть однозначными или двузначными. Всего десять цифр, и все они должны отличаться друг от друга, поскольку каждая цифра: 0; 1; 2; 3; ...; 9, может появляться лишь один раз. Таким образом, сумма всех цифр должна быть :

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Некоторые из этих цифр обозначают единицы, а другие десятки. Не нужно быть особо проницательным, чтобы сообразить, что *сумма цифр, обозначающих десятки*, может играть известную роль. Пусть эта сумма будет t. Тогда сумма оставшихся цифр, обозначающих единицы, будет $45-t$. Следовательно, сумма всех чисел ряда должна быть:

$$10t+(45-t)=100.$$

Мы получили уравнение, из которого можно определить t. Это уравнение первой степени. Решив его, мы получим:

$$t=\frac{55}{9}.$$

Здесь что-то не так. Значение найденного t представляет собой дробное число, в то время как t должно быть, конечно, целым числом. Исходя из предположения, что обе части предложенного условия могут быть одновременно удовлетворены, мы пришли к явному абсурду. Чем это можно объяснить? Очевидно, наше первоначальное предположение ошибочно. Обе части условия *не могут* быть удовлетворены одновременно. Итак, мы достигли цели. Нам удалось доказать, что обе части поставленного условия не совместимы.

Наши рассуждения представляют собой типичный пример «reductio ad absurdum».

2. *Замечания.* Вернемся к рассуждениям, изложенным выше, и осмыслим их основное направление.

Мы хотим доказать, что невозможно решить задачу, удовлетворяющую заданному условию, т. е. что невозможен тот случай, при котором все части условия могут быть удовлетворены одновременно. Однако, хотя мы еще ничего не доказали, но мы обязаны считаться с возможностью такого случая. Лишь рассмотрев этот предположительный случай и тщательно изучив его, можно надеяться обнаружить в нем какую-нибудь явную ошибку. И если мы хотим окончательно подтвердить невозможность нашего предположения, мы должны найти такую явную ошибку. Следовательно, нам ясно,что прием, который оказался удачным для решения нашего примера, разумен вообще, и мы обязаны рассмотреть тот предположительный случай, при котором все части условия удовлетворяются *несмотря на то, что он кажется очень мало вероятным.*

Более опытный читатель может обнаружить здесь еще одно обстоятельство. Ведь главным моментом в наших рассуждениях было составление уравнения с целью определить величину t. Но к этому же уравнению можно было бы прийти и не подвергая сомнению справедливость условия. Чтобы составить уравнение, мы должны выразить языком математики предположение, что все части условия задачи удовлетворяются, *несмотря на то, что мы еще не знаем, возможно ли в самом деле одновременно удовлетворить всем этим частям условия или нет.*

Наш прием «без предубеждений». Мы надеемся либо найти неизвестное, удовлетворяющее условию, либо надеемся доказать, что решить задачу невозможно. Исследование, если оно умело проводится, начинается в обоих случаях с одного и того же — с рассмотрения того предположительного случая, при котором условие удовлетворяется и лишь в ходе решения выясняется, которая из надежд оправдывается.

В подтверждение вышесказанного сравните «Геометрические фигуры», пункт 2. Сравните также Папп; анализ, результат которого опровергает предложенную теорему или приводит к выводу, что «задача на нахождение» не имеет решения, по существу является «reductio ad absurdum».

3. *Косвенное доказательство.* Простыми числами являются числа: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; ..., ..., т. е. те натуральные числа, которые не могут быть разложены на меньшие множители и которые больше 1. (Последняя фраза не относится к единице, которая, совершенно ясно, не может быть разложена на меньшие множители. У единицы другие свойства и ее не следует считать простым числом.) Простые числа являются «первичными элементами», на которые все целые числа (больше 1) могут быть разложены. Например:

$$630=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$$

разлагается на произведение пяти простых чисел.

Ряд простых чисел конечен или бесконечен? Естественно предположить, что ряд простых чисел бесконечен. Если бы он кончался, все целые числа могли быть разложены на конечное число простых чисел, и мир оказался бы, так сказать, «слишком бедным». Таким образом, возникает задача доказать, что ряд простых чисел бесконечен.

Эта задача сильно отличается от элементарных математических задач обычного типа, и на первый взгляд кажется, что к ней невозможно подступиться. Однако очень мало вероятно, как мы говорили, что такое последнее простое число, скажем P, должно существовать. Почему это так мало вероятно?

Непосредственно рассмотрим тот мало вероятный случай, при котором гипотетически, предположительно, якобы, существует некое последнее простое число ряда P. Тогда конечный ряд простых чисел имел бы такой вид: 2; 3; 5; 7; 11; ...; P. Почему этот случай так мало вероятен? Где ошибка? Сможем ли мы найти явную ошибку в наших рассуждениях? Безусловно, сможем. Для этого мы образуем такое число:

$$Q=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\ldots P)+1.$$

Раз число Q больше P, то поэтому Q, очевидно, не может быть простым числом. Следовательно, Q должно делиться на простое число. По нашему предположению, все простые числа ограничиваются рядом: 2; 3; 5; 7; ...; P. Но если число Q разделить на любое из этих чисел, то получим в остатке 1. Следовательно, Q не делится ни на одно из вышеприведенных простых чисел, которые согласно нашему предположению представляют собой все имеющиеся простые числа. Значит, в наших рассуждениях где-то есть ошибка. Или Q должно быть простым числом, или же оно должно делиться на какое-нибудь простое число. Исходя из предположения, что существует последнее простое число P, мы пришли к явной нелепости. Чем это объясняется? Тем, что наше первоначальное предположение ошибочно. Такого последнего простого числа P быть не может. Таким образом, нам удалось доказать, что ряд простых чисел бесконечен.

Это был типичный пример косвенного доказательства. (К тому же благодаря Евклиду он является широко известным, см. предложение 20 книги IX «Начал».)

Мы доказали исходную теорему (что ряд простых чисел бесконечен) тем, что опровергли не совместимую с ней противоположную теорему (что ряд простых чисел конечен), ибо последняя привела нас к явному абсурду.

Таким образом, в своем доказательстве мы соединили косвенное доказательство с «reductio ad absurdum». В таком сочетании доказательство применяется довольно часто.

4. *Возражения*. Метод решения задач, который мы изучаем, встречает немало возражений. Многие возражения являются, по-видимому, лишь разновидностями одного и того же основного возражения. Здесь мы рассмотрим доступную нашему пониманию «практическую» сторону основного возражения.

Найти доказательство, которое является плодом большого умственного усилия, несомненно, большое достижение нашей мысли. Но даже чтобы заучить такое доказательство или понять его до конца, требуется определенное умственное усилие. Вполне естественно, что нам хочется, чтобы этот труд не был затрачен даром, т. е. то, что мы сохраним в памяти, было верно и точно, а не ошибочно или абсурдно.

Но сохранить истину, выведенную из доказательства методом «reductio ad absurdum», довольно трудно. Исходным моментом всех рассуждений является ошибочное предположение, выводы из которого в равной мере ошибочны, но их ошибочность уже несколько более очевидна. Таким образом, мы продолжаем делать выводы из предшествующих до тех пор пока, наконец, не приходим к выводу, ошибочность которого очевидна. Чтобы не загромождать свою память ложными фактами, следует забыть доказательство возможно быстрее. Но, однако, это невозможно, ибо во время работы над доказательством необходимо четко и точно запоминать каждый шаг.

Таким образом, мы получаем следующую сжатую формулировку возражения против метода косвенного доказательства: имея дело с таким доказательством, мы вынуждены все время сосредоточивать свое внимание не на верной теореме, которую следует запомнить, а на ложном допущении, которое следует забыть.

Если мы желаем правильно судить о справедливости этих возражений, нам следует различать два случая использования «reductio ad absurdum»: первый — как орудие исследования, второй — как прием изложения материала. Точно такие же различия следует делать и относительно косвенного доказательства.

Нужно признать, что «reductio ad absurdum» как метод изложения материала наряду со своими достоинствами имеет и недостатки. Такое «reductio», в особенности, если оно растянуто, может оказаться невыносимым для читателя или слушателя. Все вытекающие из него выводы, которые мы последовательно рассматриваем, справедливы, но все положения, с которыми нам приходится считаться в процессе доказательства, ошибочны. Даже словесная форма изложения может стать утомительной, если она подчеркивает, а она должна подчеркивать, что все основано на исходном предположении. Слова «гипотетически», «предположительно», «якобы» должны неоднократно повторяться или же какой-нибудь другой прием должен быть найден, который тоже будет многократно повторяться. Нам хочется отвергнуть и забыть положение как невозможное, но приходится сохранять и рассматривать его как основание для последующего шага, и этот внутренний разлад может в конце концов стать невыносимым.

Однако было бы неблагоразумно отказаться совсем от «reductio ad absurdum» как от средства исследования. Оно может прийти нам в голову как вполне естественный прием и привести к решению, когда все другие средства оказываются бессильными. В этом мы могли убедиться на вышеприведенных примерах.

Надо иметь некоторый опыт, чтобы заметить, что между двумя точками зрения нет существенных расхождений. Практика показывает, что часто нетрудно бывает либо превратить косвенное доказательство в прямое, либо перестроить доказательство, связанное с длительными рассуждениями, методом «reductio ad absurdum», в более приятную форму, из которого «reductio ad absurdum» может даже полностью исчезнуть (или после должной подготовки оно может быть сведено к нескольким ярким выразительным предложениям).

Одним словом, если мы хотим полностью использовать все имеющиеся в нашем распоряжении методы доказательства той или иной истины, мы должны хорошо знать как метод «reductio ad absurdum», так и метод косвенного доказательства. Однако в том случае, когда можно успешно решить задачу одним из этих способов, следует обязательно вернуться к решению и поставить себе вопрос: *нельзя ли получить тот же результат иначе?*

Проиллюстрируем сказанное примерами.

5. *Перестройка* «reductio ad absurdum». Вернемся к рассуждениям, изложенным в пункте 1. Решая задачу методом «reductio ad absurdum», мы исходили из допущения, которое в конце концов оказалось невозможным. Однако возьмем ту часть доказательства, которая независима от первоначального ошибочного предположения и содержит правильные предпосылки. Возвращаясь к полученному решению задачи, мы сможем заметить несомненную справедливость следующего положения: если ряд чисел, однозначных или двузначных, написан так, что каждая из десяти цифр встречается только раз, то сумма этого ряда имеет вид:

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5),$$

т. е. эта сумма делится на 9. Но по условиям предложенной головоломки сумма должна быть равна 100. Возможно ли это? Нет, поскольку 100 не делится на 9.

Таким образом, метод «reductio ad absurdum», который привел к открытию этой аргументации, исчез из нашего нового изложения доказательства.

Между прочим, читатель, знакомый с приемом исключения девяток, теперь может оценить всю аргументацию с одного взгляда.

6. *Преобразование косвенного доказательства.* Обратимся к рассуждениям, изложенным в пункте 3. Возвращаясь к завершенному решению и тщательно обдумав весь ход его, мы можем найти ряд аргументов, которые независимы от какого бы то ни было ошибочного допущения. Однако лучший ключ к разгадке решения мы найдем при вторичном рассмотрении смысла именно предложенной задачи.

Как следует понимать утверждение, что ряд простых чисел бесконечен? Очевидно, имеется в виду следующее: когда мы получили какое-нибудь конечное множество простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; ... P, где P последнее из этих найденных простых чисел, то всегда найдется еще одно простое число. Итак, что нужно предпринять, чтобы доказать существование бесконечного ряда простых чисел? Мы должны указать, каким образом можно найти простое число, отличное от всех известных. Таким образом, наша «задача на доказательство» по существу сведена к следующей «задаче на нахождение»: *Даны простые числа: 2; 3; 5; 7; ... P. Требуется найти новое простое число, отличное от всех данных простых чисел.*

Придав нашей первоначальной задаче такую формулировку, мы сделали главный шаг. Теперь сравнительно легко увидеть, как использовать наиболее существенные части предыдущей аргументации для нашей новой цели. В самом деле число

$$Q=(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\ldots P)+1$$

несомненно делится на какое-то простое число. Возьмем — в этом суть идеи — любой простой делитель числа Q (например, наименьший) и обозначим его N. (Конечно, если Q простое число, то $N=Q$.) Если величину Q разделить на любое из простых чисел: 2; 3; 5; 7; ... P, то получим в остатке 1. Таким образом, ни одно из этих чисел не может равняться N, так как N является делителем Q. Это как раз то, что нам нужно: N есть простое число, и оно отлично от всех ранее известных нам простых чисел: 2; 3; 5; 7; 11; ... P.

Это доказательство представляет собой определенный прием, при помощи которого можно вновь и вновь продлить ряд простых чисел до бесконечности. В нем нет ничего окольного, нет необходимости рассматривать невозможные положения. Однако по существу это доказательство такое же, как и приведенное нами косвенное доказательство, которому нам удалось только придать другой вид.

Как решать задачу

ПОНИМАНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

I
Нужно ясно понять задачу.

Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?

Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?

Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения.

Разделите условие на части. Постарайтесь записать их.

СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА РЕШЕНИЯ

II
Нужно найти связь между данными и неизвестным. Если не удается сразу обнаружить эту связь, возможно, полезно будет рассмотреть вспомогательные задачи. В конечном счете необходимо прийти к плану решения.

Не встречалась ли вам раньше эта задача? Хотя бы в несколько другой форме?

Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Не знаете ли теоремы, которая могла бы оказаться полезной?

Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным.

Вот задача, родственная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат? Нельзя ли использовать метод ее решения? Не следует ли ввести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы стало возможно воспользоваться прежней задачей?

Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе? Вернитесь к определениям.

Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Более общую? Более частную? Аналогичную задачу? Нельзя ли решить часть задачи? Сохраните только часть условия, отбросив остальную часть: насколько определенным окажется тогда неизвестное; как оно сможет меняться? Нельзя ли извлечь что-либо полезное из данных? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Нельзя ли изменить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то и другое так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе друг к другу?

Все ли данные вами использованы? Все ли условие? Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА

III
Нужно осуществить план решения.

Осуществляя план решения, *контролируйте каждый свой шаг.* Ясно ли вам, что предпринятый вами шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?

ВЗГЛЯД НАЗАД
(изучение полученного решения)

IV
Нужно изучить найденное решение.

Нельзя ли *проверить результат?* Нельзя ли проверить ход решения?

Нельзя ли получить тот же результат иначе? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда?

Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения?

КАК ИСКАТЬ РЕШЕНИЕ?[1]

(Сокращенный вариант таблицы)

1. *Понять предложенную задачу.*
2. *Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотрев промежуточные задачи („анализ“).*
3. *Реализовать найденную идею решения („синтез“).*
4. *Решение проверить и оценить критически.*

2.

Сформулировать отношение (или отношения) между неизвестным и данными.

Преобразовать неизвестные элементы. Попытаться ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи.

Преобразовать данные элементы. Попытаться получить, таким образом, новые элементы, более близкие к искомым неизвестным.

Решить только часть задачи.

Удовлетворить только части условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? (Геометрические места!)

Обобщить. Рассмотреть частные случаи. Применить аналогию.

1.

Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти?

Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны, или же чрезмерны?

Нельзя ли сформулировать задачу иначе?

Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решающейся проще? Решающейся сразу?

Эти вопросы нужно повторять каждый раз, когда в ходе решения наступает заминка, при решении каждой промежуточной задачи. Кроме того: Все ли данные задачи были уже использованы?

„Заменить термины их определениями“ (Паскаль).

3.

Испытывать правильность каждого шага, принимая лишь то, „что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью“ (Декарт)

4.

Правдоподобен ли результат? Почему?

Нельзя ли сделать проверку?

Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Какие результаты еще можно получить на том же пути?

---

[1] См. примечание на стр. 29.